

# Mecanum 四轮移动系统运动学解析

王一治

(杭州师范大学理学院, 杭州 310036)

5 **摘要:** 通过对 Mecanum 轮结构及运动原理分析, 求得了轮轮中心对地面间的速度关系; 通过对典型 Mecanum 四轮系统结构及运动原理分析, 求得了系统中心与四轮转速之间的关系式; 进而求得了 Mecanum 四轮全方位系统的运动学正解表达式和运动学逆解表达式。

**关键词:** 机器人技术; Mecanum 四轮系统; 运动学解析

10 **中图分类号:** TG146

## Kinematics Analysis of Mecanum Four Wheel Mobile System

Wang Yizhi

15 (College of Scienc, Hangzhou University, Hangzhou 310036)

**Abstract:** Through analyzing the Mecanum wheel structure and motion principle, obtained the speed relations between the round wheel center on the ground; Through analysis of typical Mecanum four-wheel system structure and the movement principle, obtained the relation between the system center and the four wheel speed; Then calculated the Mecanum four-wheel omni-directional system expression for the positive solution of the kinematics and inverse kinematics solution expression.

**Key words:** Robot technology; Mecanum four wheel system; Kinematics analysis

### 0 引言

25 Mecanum 全方位四轮运动系统可以实现平面 3 自由度的全方位运动。因其全方位运动系统的运动灵活性比普通轮系统高, 特别适合应用于室内机器人或狭窄地形下的机器人运动系统中。

目前应用的 Mecanum 轮从结构上有多种形式, 从辘子与轮毂的连接形式分, 有中间支撑<sup>[1]</sup>和两端支撑<sup>[2]</sup>两种; 从辘子形状上分, 有锥形<sup>[3]</sup>和纺锤形<sup>[4]</sup>等形式。

30 Mecanum 全方位系统实现平面三自由度全方位运动的能力取决于 Mecanum 轮结构特征及其轮组布局结构形式, 典型 Mecanum 轮全方位移动系统为四轮矩形结构形式<sup>[5]</sup>, 而 Mecanum 四轮移动系统平面运动学研究的是车轮与系统中心参考点之间的位移、速度、加速度之间的关系, 其中要解决两类问题, 其一是正运动学问题, 即各车轮到系统中心的速度映射关系。其二是逆运动学问题, 即系  
35 统运动中心到各轮速度的映射关系<sup>[6]</sup>。

### 1 Mecanum 轮运动特性

设 Mecanum 轮  $i$  相对于机身坐标系的位姿关系如图 1 所示, 轮  $i$  运动原理如图 2 所示。

---

作者简介: 王一治 (1966-), 男, 高级工程师, 主要研究方向: 机器人技术. E-mail: shuwyz@126.com

40

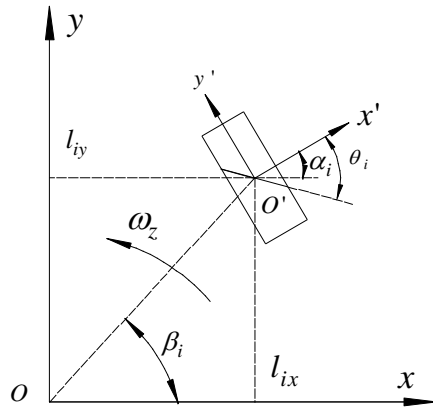


图 1 轮 i 在机身坐标系中的位姿

Fig. 1 wheel I in body coordinates posture

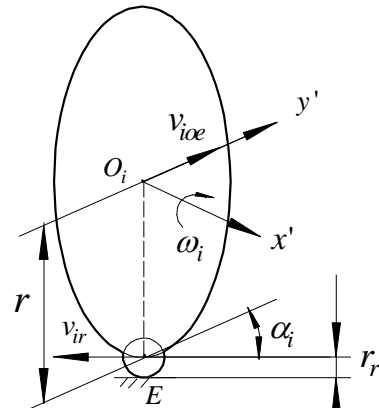


图 2 轮 i 运动原理

Fig. 2 wheel I motion principle

规定： $Oxy$  为固联于轮组系统的坐标系； $O_i x' y'$  是固联于轮毂中心  $O_i$  的坐标  
 45 系； $(l_{ix} \ l_{iy} \ \theta_i)$  表示  $O_i x' y'$  对  $Oxy$  的位姿； $r_i, r_r$  分别表示轮  $i$  轮毂半径及辇子半  
 径； $\alpha_i$  表示辇子偏置角； $v_{ir}$  表示轮  $i$  着地辇子中心速度矢量； $\beta_i$  表示轮  $i$  的安  
 装角度；下文分别称  $\omega_i, v_{ir}$  为轮  $i$  的关节速度； $(v_x \ v_y \ \omega_z)$  表示点  $O$  在  $Oxy$  中速度；  
 $(v'_{ix} \ v'_{iy} \ \omega'_i)$  表示点  $O_i$  在  $O_i x' y'$  中速度； $(v_{ix} \ v_{iy} \ \omega_i)$  表示点  $O_i$  在  $Oxy$  中速度。

根据图 1 有：

50

$$\begin{pmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_{ix} \\ v'_{iy} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_2 \begin{pmatrix} v'_{ix} \\ v'_{iy} \end{pmatrix} \quad (1)$$

式中： $\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}$

根据图 2 因  $v_{ior} = \omega r$ ，有：

$$\begin{pmatrix} v'_{ix} \\ v'_{iy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \alpha_i \\ r_i & -\cos \alpha_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_i \\ v_{ir} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_1 \begin{pmatrix} \omega_i \\ v_{ir} \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中： $\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \alpha_i \\ r_i & -\cos \alpha_i \end{pmatrix}$

55 因系统做平面运动，有：

$$\begin{pmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -l_{iy} \\ 0 & 1 & l_{ix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{pmatrix} = \mathbf{R}_3 \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{pmatrix} \quad (3)$$

式中： $\mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -l_{iy} \\ 0 & 1 & l_{ix} \end{pmatrix}$

由式(1)(2)(3)有:

$$\mathbf{R}_3 \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{pmatrix} = \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 \begin{pmatrix} \omega_i \\ v_{ir} \end{pmatrix} \quad (4)$$

60 因  $r_i \neq 0, 0 < |\alpha_i| < \pi/2$ ,  $\det(\mathbf{R}_1) \neq 0$ ,  $\det(\mathbf{R}_2) \neq 0$ , 则系统运动中心(参考点  $O$ ) 运动速度到轮毂旋转速度之间的映射关系为:

$$\begin{pmatrix} \omega_i \\ v_{ir} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_1^{-1} \cdot \mathbf{R}_2^{-1} \cdot \mathbf{R}_3 \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, i=1, \dots, n \quad (5)$$

65 辊子中心速度  $v_{ir}$  与轮毂旋转速度  $\omega_i$  具有确定关系, 因系统中独立驱动变量只有轮毂转速  $\omega_i$ , 根据式 (5) 可求得系统第  $i$  轮与系统中心的正、逆运动学关系分别为式(6)、(7):

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \mathbf{R}^+ \begin{pmatrix} \omega_i \\ v_{ir} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} \omega_i \\ v_{ir} \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{pmatrix} \quad (7)$$

式中:  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{R}_3$ ,  $\mathbf{R}^+ = (\mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T$

## 2 Mecanum 四轮系统运动学解析

70 典型 Mecanum 四轮系统如图 3 所示, 设四个轮子的偏置角取  $\alpha = \pm 45^\circ$ , 与  $y$  轴正方向夹角逆时针为正; 轮毂半径及辊子半径分别为  $r, r_r$ ; 前后轴距、左右轮距分别为  $2l_x, 2l_y$ ; 四个轮子的轮毂半径  $r$  处的线速度分别为  $v_{1w}, v_{2w}, v_{3w}, v_{4w}$ ; 辊子中心线速度分别为  $v_{1r}, v_{2r}, v_{3r}, v_{4r}$ ; 系统中心速度为  $(v_x \ v_y \ \omega_z)$ , 正方向如图所示;  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  表示四个轮的旋转速度, 与  $y$  轴的方向按右手定则确定。

75

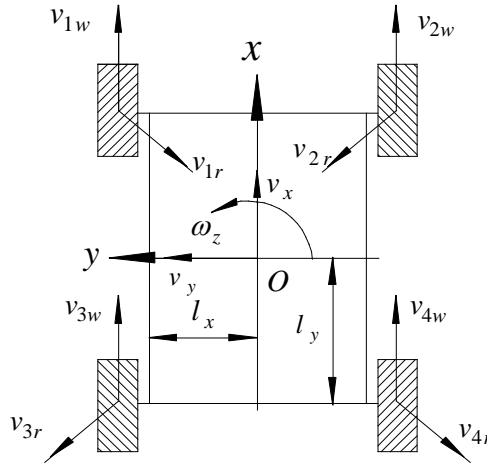


图3 四轮系统结构及速度关系

Fig. 3 Relationship between four wheel system structure and velocity

因:  $v_{iw} = r\omega_i, i=1,2,3,4$ ,  $v_{ir} = \sqrt{2}r_r\omega_i, i=1,2,3,4$

80 则有:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \mathbf{R}^+ \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{pmatrix} \quad (9)$$

式中:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{r+r_r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -(l_x+l_y) \\ 1 & 1 & (l_x+l_y) \\ 1 & 1 & -(l_x+l_y) \\ 1 & -1 & (l_x+l_y) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^+ = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} r & r & r & r \\ -r_r & r_r & r_r & -r_r \\ \frac{r+r_r}{l_x+l_y} & \frac{r+r_r}{l_x+l_y} & -\frac{r+r_r}{l_x+l_y} & \frac{r+r_r}{l_x+l_y} \end{pmatrix}$$

则有系统运动学正解为式 (10) :

$$\begin{cases} v_x = \frac{r}{4}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) \\ v_y = \frac{r_r}{4}(-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ \omega_z = \frac{r+r_r}{4(l_x+l_y)}(-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4) \end{cases} \quad (10)$$

系统运动学逆解为式 (11) :

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{r+r_r}(v_x - v_y - (l_x + l_y)\omega_z) \\ \omega_2 = \frac{1}{r+r_r}(v_x + v_y + (l_x + l_y)\omega_z) \\ \omega_3 = \frac{1}{r+r_r}(v_x + v_y - (l_x + l_y)\omega_z) \\ \omega_4 = \frac{1}{r+r_r}(v_x - v_y + (l_x + l_y)\omega_z) \end{cases} \quad (11)$$

### 3 结论

(1) 基于图 1 所示典型的轮结构形式及图 3 所示的典型 Mecanum 四轮系统  
90 结构，求得其运动学正解的解析式如式 (10)，运动学逆解如式 (11)。

(2) 由于 Mecanum 全方位运动系统的特殊性，如果 Mecanum 轮辍子的偏置角非  $45^\circ$  时，系统存在奇异位形，式 (10) 运动学正解及式 (11) 运动学逆解不适用。此时需要首先分析其奇异位形，然后针对具体的辍子偏置角度，求得其运动学解析解。

#### 95 [参考文献] (References)

\*\*\*\*

- 100 **【1】**. Tlale N, Villiers D. Kinematics and Dynamics Modelling of a Mecanum Wheeled Mobile Platform[C]// IEEE 15th International Conference on [Mechatronics and Machine Vision. Practice](#), 2008:657 – 662.
- 【2】**. Bradbury H M. Omni-directional Transport Device[P]. US Patent 862,032, 1980.
- 【3】**. Jorge Angeles. An Innovative Drive for Wheeled Mobile Robots[C]// Proceedings of the 2003 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM) 2003:156-162.
- 105 **【4】**. Li Zhenbo, Zhang Chen. Genetic Algorithms for the Optimal Design of Electromagnetic Micro Motors [J]. High Technology Letter , 2000 ,6(1): 50-54.
- 【5】**. Byun K S, Song J B. Design and Construction of Continuous Alternate Wheels for an Omnidirectional Mobile Robot [J] , Journal of Robotic Systems, 2001,9 (9): 569–579.
- 【6】**. 蒋新松. 机器人学导论[M]. 沈阳: 辽宁科学出版社,1994.