

双目立体视觉中物点定位的一种快速算法

张 钧^{1,3}, 张 宏¹, 刘小茂², 曾绍群³

(1. 华中科技大学多谱信息处理技术国防科技重点实验室, 湖北 武汉 430074; 2. 华中科技大学数学与统计学院, 湖北 武汉 430074;
3. 华中科技大学生命科学与技术学院, 湖北 武汉 430074)

摘 要: 在分析了双目立体视觉中物点定位的最小二乘法和归一化的最小二乘法的原理和不足后, 本文给出了公垂线中点法的一种简便的计算公式并给出了相应的快速算法. 实验结果表明, 与最小二乘法和归一化的最小二乘法相比, 本文所提的快速算法不仅计算简单, 而且具有更优良的抗噪性.

关键词: 双目立体视觉; 物点定位; 公垂线

中图分类号: TP39

文献标识码: A

A Fast Algorithm for Locating the Object Point in Binocular Stereovision

ZHANG Jun^{1,3}, ZHANG Hong¹, LIU Xiao-mao², ZENG Shao-qun³

(1. State Key Laboratory for Multispectral Information Processing Technologies, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China;

3. School of Life Science and Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: After analyzing the principle and the shortage of the least square method and the normalized least square method used to get the object point position in binocular stereovision, a simple computation formula and the corresponding fast algorithm of the common perpendicular midpoint method is proposed. The result of the simulation experiments show that comparing with the least square method and the normalized least square method, the proposed fast algorithm not only is of simple computation, but also has the better anti-noise performance.

Keywords: binocular stereovision; object point locating; common perpendicular

1 引言 (Introduction)

用立体视觉的方法进行 3 维重建, 是指由两幅或者多幅 2 维图像恢复物体 3 维信息. 双目立体视觉是立体视觉的一个重要分支, 它由摄像机在两个不同位置拍摄同一场景, 在完成了摄像机内外参数的标定后, 根据场景中同一个物点在两幅图像中的像点 (投影点) 的 2 维图像坐标, 通过一种物点定位的方法来获得该物点的 3 维空间坐标, 进而完成整个场景的 3 维重建. 因此, 物点定位是双目立体视觉中的一个重要步骤.

物点定位的原理如图 1 所示. 空间中的一个物点 P , 在位于点 O_L 处的左摄像机 C_L 的成像平面上的图像点为 p_L , 仅由 p_L 的位置信息是得不到物点 P 的 3 维位置信息的. 显然, 在连线 $O_L P$ 上的任意一点 P' 的图像点都是 p_L . 因此, 由 p_L 点的位置信息, 仅知道物点 P 位于 $O_L p_L$ 连线上的某一位置, 但无法知道 P 点的深度信息. 如果此时还获得了在位于点 O_R 处的右摄像机 C_R 的成像平面上的物点 P

另一个图像点 p_R 的位置信息, 换句话说, 当 p_L 和 p_R 为对应于空间中同一物点 P 的同名像点时, 就可以通过求 $O_L p_L$ 和 $O_R p_R$ 这两条同名光线的交点来确定物点 P 的 3 维位置信息了.

下面介绍物点定位的数学模型. 假设摄像机 C_L 与 C_R 的内外参数都已经获得, 它们的投影矩阵分别为满秩矩阵 M^L 与 M^R . 于是有^[1~3]:

$$Z_L \begin{pmatrix} u_L \\ v_L \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^L & m_{12}^L & m_{13}^L & m_{14}^L \\ m_{21}^L & m_{22}^L & m_{23}^L & m_{24}^L \\ m_{31}^L & m_{32}^L & m_{33}^L & m_{34}^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$Z_R \begin{pmatrix} u_R \\ v_R \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^R & m_{12}^R & m_{13}^R & m_{14}^R \\ m_{21}^R & m_{22}^R & m_{23}^R & m_{24}^R \\ m_{31}^R & m_{32}^R & m_{33}^R & m_{34}^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

其中 $(x, y, z)^T$ 为物点 P 在世界坐标系下的坐标,

$(u_L, v_L, 1)^T$ 与 $(u_R, v_R, 1)^T$ 是物点 P 的像点 p_L 与 p_R 分别在左右像平面中的齐次坐标, m_{ij}^k 为 M^k 的第 i 行第 j 列元素 ($k=L,R, i=1,2,3, j=1,2,3,4$), Z_L 和 Z_R 为物点 P 分别在摄像机坐标系 $O_L-X_L Y_L Z_L$ 与 $O_R-X_R Y_R Z_R$ 下的 Z 值坐标, 矩阵和向量的上标 T 表示矩阵和向量的转置变换.

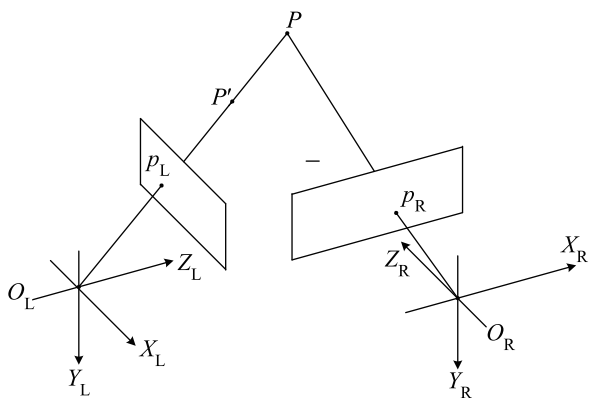


图1 用双摄像机观察物点

Fig.1 Viewing object point using two cameras

由式 (1)、(2) 消去 Z_L 和 Z_R , 可得到如下关于 x, y, z 的 4 个线性方程^[1~3]:

$$(u_L m_{31}^L - m_{11}^L)x + (u_L m_{32}^L - m_{12}^L)y + (u_L m_{33}^L - m_{13}^L)z = m_{14}^L - u_L m_{34}^L \quad (3)$$

$$(v_L m_{31}^L - m_{21}^L)x + (v_L m_{32}^L - m_{22}^L)y + (v_L m_{33}^L - m_{23}^L)z = m_{24}^L - v_L m_{34}^L \quad (4)$$

$$(u_R m_{31}^R - m_{11}^R)x + (u_R m_{32}^R - m_{12}^R)y + (u_R m_{33}^R - m_{13}^R)z = m_{14}^R - u_R m_{34}^R \quad (5)$$

$$(v_R m_{31}^R - m_{21}^R)x + (v_R m_{32}^R - m_{22}^R)y + (v_R m_{33}^R - m_{23}^R)z = m_{24}^R - v_R m_{34}^R \quad (6)$$

其中, 式 (3)、(4) 描述的是世界坐标系中通过 $O_L p_L$ 的直线方程, 而式 (5)、(6) 描述的是世界坐标系中通过 $O_R p_R$ 的直线方程. 由于物点 P 是直线 $O_L p_L$ 和直线 $O_R p_R$ 的交点, 因此, 物点定位问题就被转化为由方程 (3)、(4) 确定的直线与由方程 (5)、(6) 确定的直线的求交问题.

两条直线的求交问题又有不同的算法. 式 (3) ~ (6) 为包含变量 x, y, z 的 4 个线性方程, 若直线 $O_L p_L$ 和 $O_R p_R$ 一定相交, 则这 4 个方程必定有解, 而且解是唯一的. 因此, 可以任取其中的 3 个方程去解 x, y, z , 都会得到这个唯一的解. 文 [4,5] 中物点 P 的定位算法的解算公式就是在直线 $O_L p_L$ 和 $O_R p_R$ 一定相交, 物点一定在直线 $O_L p_L$ 上的假设下给出的.

但是在实际应用中, 已经获得的摄像机 C_L 与 C_R 的内外参数可能含有误差, 也就是说, 投影矩阵

M^L 与 M^R 可能含有误差. 另外, 左右两幅图像中对应于同一个物点的两个同名像点的图像坐标也可能存在误差, 也即 u_L, v_L, u_R, v_R 可能也存在误差. 这些误差可能会造成不存在 x, y, z 能同时满足式 (3) ~ (6) 的局面, 也就是说由式 (3) ~ (6) 这 4 个式子构成的线性方程组无解. 此时, 采用文 [4,5] 中物点 P 的定位算法的解算公式就不合适了.

那么, 在可能含有噪声的实际应用中, 求取由式 (3) ~ (6) 构成的方程组的一个近似解作为物点 P 在世界坐标系下的坐标 $(x, y, z)^T$ 的一个估计, 似乎就顺理成章了.

最小二乘法是求线性方程组近似解的最常用的方法. 采用最小二乘法得到的物点的 3 维坐标估计值将使式 (3) ~ (6) 的离差的平方和达到最小^[1~3]. 所谓离差是指将物点 3 维坐标的估计值 $(x, y, z)^T$ 代入方程左边得到的常数与方程右边常数值的差值. 理想的情况下, 物点坐标值应该使得式 (3) ~ (6) 的离差为 0, 离差越小表明近似解的精度越高.

将式 (3) ~ (6) 所构成的方程记为:

$$AX = B \quad (7)$$

其中,

$$A = \begin{pmatrix} u_L m_{31}^L - m_{11}^L & u_L m_{32}^L - m_{12}^L & u_L m_{33}^L - m_{13}^L \\ v_L m_{31}^L - m_{21}^L & v_L m_{32}^L - m_{22}^L & v_L m_{33}^L - m_{23}^L \\ u_R m_{31}^R - m_{11}^R & u_R m_{32}^R - m_{12}^R & u_R m_{33}^R - m_{13}^R \\ v_R m_{31}^R - m_{21}^R & v_R m_{32}^R - m_{22}^R & v_R m_{33}^R - m_{23}^R \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} m_{14}^L - u_L m_{34}^L \\ m_{24}^L - v_L m_{34}^L \\ m_{14}^R - u_R m_{34}^R \\ m_{24}^R - v_R m_{34}^R \end{pmatrix} \quad X = (x, y, z)^T$$

则 (7) 式的最小二乘解为:

$$X = (A^T A)^{-1} A^T B \quad (8)$$

由式 (8) 和最小二乘方法的最优准则可以看出, 最小二乘解与矩阵 A 的行向量的模有关系. A 的 4 个行向量中, 模越大的行向量对最小二乘解的影响也就越大. 能否消除这种影响呢?

其实, 既然是求方程组 (7) 的一个近似解, 除了可以采用使线性方程组中的所有线性方程的离差的平方和达到最小的最优近似准则外, 还可以采用其他的最优近似准则得到其他形式的近似解.

若将式 (7) 中的 4 个线性方程看作是 3 维空间中的 4 个平面方程, 则可以通过寻求一个 3 维空间中的点, 使得这个点到这 4 个平面的距离的平方和

达到最小来获得线性方程组 (7) 的近似解. 这就引出了下面的归一化最小二乘法.

将系数矩阵 \mathbf{A} 的所有行向量都进行归一化处理. 也即, 在式 (7) 的两边同时左乘一个矩阵 \mathbf{W} , 将

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{44} \end{pmatrix}, \quad w_{11} = \frac{1}{\sqrt{(u_L m_{31}^L - m_{11}^L)^2 + (u_L m_{32}^L - m_{12}^L)^2 + (u_L m_{33}^L - m_{13}^L)^2}}, \quad w_{22} = \frac{1}{\sqrt{(v_L m_{31}^L - m_{21}^L)^2 + (v_L m_{32}^L - m_{22}^L)^2 + (v_L m_{33}^L - m_{23}^L)^2}}, \quad w_{33} = \frac{1}{\sqrt{(u_R m_{31}^R - m_{11}^R)^2 + (u_R m_{32}^R - m_{12}^R)^2 + (u_R m_{33}^R - m_{13}^R)^2}}, \quad w_{44} = \frac{1}{\sqrt{(v_R m_{31}^R - m_{21}^R)^2 + (v_R m_{32}^R - m_{22}^R)^2 + (v_R m_{33}^R - m_{23}^R)^2}}.$$

从归一化的最小二乘解的形式上可以看出, 归一化的最小二乘解是一种加权的最小二乘解 [6,7].

总结以上两种物点定位方法, 可以看出这种思路: 物点为两条直线的交点, 直线又可以表示为两个平面的交线. 因此, 在上述的算法中, 两条直线的求交问题被转化为 4 个平面的求交问题. 由于数据有噪声, 只能求取 4 个平面的交点的近似解. 采用 4 个平面方程的离差的平方和最小的准则将得到 4 个平面的交点的最小二乘解, 采用到 4 个平面的距离的平方和达到最小的准则将得到 4 个平面的交点的归一化的最小二乘解.

可是, 两条直线的求交问题与 4 个平面的求交问题真的是完全等价的吗? 如果完全等价, 则不同的直线求交问题应该对应于不同形式的平面方程组, 而描述同样的两条直线的求交问题的不同形式的平面方程组应该对应于相同的近似解.

下面探讨这两方面的问题:

一方面, 考虑不同情况下的直线求交问题是否会对应于不同形式的平面方程组? 比如下面的 3 种情况: (a) 求解式 (3) 和 (5) 表示的两个平面的相交直线与式 (4) 和 (6) 表示的两个平面方程的相交直线的交点. (b) 求解式 (3) 和 (6) 表示的两个平面的相交直线与式 (4) 和 (5) 表示的两个平面的相交直线的交点. (c) 求解式 (3) 和 (4) 两个平面的相交直线与式 (5) 和 (6) 表示的两个平面的相交直线的交点. 显然, 将以上 3 种不同情况下的直线求交问题转换为平面求交问题时, 都会得到完全相同的平面方程组, 即式 (3) ~ (6) 构成的方程组. 这说明方程组 (3) ~ (6) 的平面求交问题的最优近似解与仅考虑情况 (c) 时的直线求交问题的最优近似解不是完全等价的.

式 (7) 变为: $\mathbf{WAX} = \mathbf{WB}$.

这样, 可得归一化处理后的最小二乘解

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{B} \quad (9)$$

另一方面, 考虑描述同样的两条直线求交的不同形式的平面方程组是否会得到相同的近似解? 比如对式 (7) 的方程组的等号两边同时左乘一个 4 阶的变换矩阵 \mathbf{Q} , 矩阵 \mathbf{Q} 可以描述成一系列关于方程组系数矩阵 \mathbf{A} 的第 $2k+1$ 行和第 $2k+2$ 行之间的行变换的初等变换矩阵的乘积 ($k=0,1$). 变形后的方程组为 $\mathbf{QAX} = \mathbf{QB}$. 显然, 经过这种变形后的 4 个平面方程描述的还是同样的两条直线的求交问题. 但变形后的方程组的最小二乘解为 $\mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{B}$. 显然, 变形后的最小二乘解是随着变换矩阵 \mathbf{Q} 的不同而不同的. 同理, 变形后的归一化的最小二乘解也是随着变换矩阵 \mathbf{Q} 的不同而不同的. 也就是说, 在数据有噪声的情况下, 描述同样的两条直线的不同形式的平面方程组, 会得到不同的直线交点的近似解.

综合以上两个方面的考虑, 得到的结论是: 两条直线的求交问题与 4 个平面的求交问题不是完全等价的, 不能将直线求交问题简单地转化为平面求交问题.

既然这样, 为何不直接求解两条直线的求交问题?

文 [8,9] 中提出了将两条直线的公垂线的中点视为两条直线的求交问题的近似解的思路, 本文称该物点定位方法为公垂线中点法. 但文 [8,9] 只给出了公垂线中点法的求解思路, 并未给出具体的计算公式和相应的求解算法.

2 公垂线中点法的一种快速算法 (A fast algorithm of the common perpendicular midpoint method)

本节先给出图 1 中到直线 $O_L p_L$ 和 $O_R p_R$ 的距离的平方和达到最小的点的解算公式, 再证明这个

点就是同名光线的公垂线的中点, 然后再给出公垂线中点法的一种快速算法.

记图 1 中直线 $O_L P_L$ 和 $O_R P_R$ 分别为直线 T_1 和 T_2 , 设 T_1 和 T_2 的单位方向向量分别为 \mathbf{N}_1 和 \mathbf{N}_2 . 则有

$$\mathbf{N}_1 = \frac{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|}, \quad \mathbf{N}_2 = \frac{\mathbf{A}_3 \times \mathbf{A}_4}{\|\mathbf{A}_3 \times \mathbf{A}_4\|} \quad (10)$$

其中

$$\mathbf{A}_1 = (u_L m_{31}^L - m_{11}^L, u_L m_{32}^L - m_{12}^L, u_L m_{33}^L - m_{13}^L)^T \quad (11)$$

$$\mathbf{A}_2 = (v_L m_{31}^L - m_{21}^L, v_L m_{32}^L - m_{22}^L, v_L m_{33}^L - m_{23}^L)^T \quad (12)$$

$$\mathbf{A}_3 = (u_R m_{31}^R - m_{11}^R, u_R m_{32}^R - m_{12}^R, u_R m_{33}^R - m_{13}^R)^T \quad (13)$$

$$\mathbf{A}_4 = (v_R m_{31}^R - m_{21}^R, v_R m_{32}^R - m_{22}^R, v_R m_{33}^R - m_{23}^R)^T \quad (14)$$

两个 3 维向量之间的运算符 \times 表示叉积运算, 向量的运算符 $\|\cdot\|$ 表示向量的取模运算.

下面通过引理 1 ~ 3 和定理 1 给出图 1 中到直线 $O_L P_L$ 和 $O_R P_R$ 的距离的平方和达到最小的点的解算公式.

在以下的讨论中, 记 \mathbf{I} 为 3 阶单位矩阵.

引理 1 若 \mathbf{N}_1 和 \mathbf{N}_2 为 3 维单位向量, 则如下 3 个等式成立:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 (\mathbf{I} - \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i^T) (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2) &= (1 - \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_2) (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2) \\ \sum_{i=1}^2 (\mathbf{I} - \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i^T) (\mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_2) &= (1 + \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_2) (\mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_2) \\ \sum_{i=1}^2 (\mathbf{I} - \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i^T) (\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2) &= 2(\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2) \end{aligned}$$

证明: 注意到 $\mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_2 = \mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 = \mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_2 = 1$, $\mathbf{N}_1^T (\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2) = \mathbf{N}_2^T (\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2) = 0$. 因此, 由简单的验算可知引理 1 的结论成立.

引理 2 若 \mathbf{N}_1 和 \mathbf{N}_2 为 3 维单位向量, 并且 $|\mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_2| < 1$, 则 $1 - \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_2$ 、 $1 + \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_2$ 、 2 为 3 阶矩阵 $\sum_{i=1}^2 (\mathbf{I} - \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i^T)$ 的 3 个特征根, $\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2$ 、 $\mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_2$ 、 $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$ 分别为对应于这 3 个特征根的特征向量.

证明: 由 $|\mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_2| < 1$ 知, 单位向量 \mathbf{N}_1 和 \mathbf{N}_2 互不平行. 因此, 向量 $\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2$ 、 $\mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_2$ 、 $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$ 均为非零向量. 由引理 1 知, 引理 2 的结论成立.

引理 3 若 \mathbf{N}_1 和 \mathbf{N}_2 为 3 维单位向量, 并且 $|\mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_2| < 1$, 则矩阵 $\sum_{i=1}^2 (\mathbf{I} - \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i^T)$ 为正定矩阵.

证明: 显然, 矩阵 $\sum_{i=1}^2 (\mathbf{I} - \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i^T)$ 为对称矩阵. 又由 $|\mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_2| < 1$ 知, $1 - \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_2$ 、 $1 + \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_2$ 均大于 0. 故

由引理 2 知, 对称矩阵 $\sum_{i=1}^2 (\mathbf{I} - \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i^T)$ 的所有特征根都大于 0. 因此, 引理 3 的结论成立.

定理 1 设 3 维欧氏空间中直线 T_i 的单位方向向量为 $\mathbf{N}_i, i = 1, 2$. 则当 $|\mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_2| < 1$ 时, 点 $P(P = \left[\sum_{i=1}^2 (\mathbf{I} - \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i^T) \right]^{-1} \cdot \left[\sum_{i=1}^2 (\mathbf{I} - \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i^T) \mathbf{P}_{i0} \right])$ 是 3 维欧氏空间中到直线 $T_i, i = 1, 2$ 的距离的平方和达到最小的点. 其中, \mathbf{P}_{i0} 为直线 T_i 上的任一点, $i = 1, 2$, \mathbf{P} 代表 P 点的坐标, 下文同.

证明: 如图 2 所示, 点 P 为空间中的一点, P_i 是点 P 到直线 T_i 的垂足, \mathbf{P}_{i0} 是直线 T_i 上的任一点, 则有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P} \mathbf{P}_i\|^2 &= \|\mathbf{P} \mathbf{P}_{i0}\|^2 - \|\mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i0}\|^2 = (\mathbf{P} - \mathbf{P}_{i0})^T (\mathbf{P} - \mathbf{P}_{i0}) - \\ &(\mathbf{P} - \mathbf{P}_{i0})^T \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i^T (\mathbf{P} - \mathbf{P}_{i0}) \\ &= (\mathbf{P} - \mathbf{P}_{i0})^T (\mathbf{I} - \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i^T) (\mathbf{P} - \mathbf{P}_{i0}) \end{aligned}$$

从而, 点 P 到两条直线 T_1 和 T_2 的距离的平方和为:

$$\begin{aligned} S(\mathbf{P}) &= \sum_{i=1}^2 (\mathbf{P} - \mathbf{P}_{i0})^T (\mathbf{I} - \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i^T) (\mathbf{P} - \mathbf{P}_{i0}) \\ &= \mathbf{P}^T \sum_{i=1}^2 (\mathbf{I} - \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i^T) \mathbf{P} - \sum_{i=1}^2 \mathbf{P}_{i0}^T (\mathbf{I} - \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i^T) \mathbf{P} - \\ &\mathbf{P}^T \sum_{i=1}^2 (\mathbf{I} - \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i^T) \mathbf{P}_{i0} + \sum_{i=1}^2 \mathbf{P}_{i0}^T (\mathbf{I} - \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i^T) \mathbf{P}_{i0} \end{aligned}$$

记 $\mathbf{U} = \sum_{i=1}^2 (\mathbf{I} - \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i^T)$, 则由引理 3 知 \mathbf{U} 正定, 故 \mathbf{U} 可逆.

记 $\mathbf{K} = \mathbf{U}^{-1} \sum_{i=1}^2 (\mathbf{I} - \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i^T) \mathbf{P}_{i0}$, 则有

$$\begin{aligned} S(\mathbf{P}) &= (\mathbf{P} - \mathbf{K})^T \mathbf{U} (\mathbf{P} - \mathbf{K}) - \\ &\mathbf{K}^T \mathbf{U} \mathbf{K} + \sum_{i=1}^2 \mathbf{P}_{i0}^T (\mathbf{I} - \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i^T) \mathbf{P}_{i0} \end{aligned}$$

上面的等式中, 等号右边的第 2 项和第 3 项都与 \mathbf{P} 无关. 由 \mathbf{U} 的正定性知, $S(\mathbf{P})$ 在 $\mathbf{P} = \mathbf{K}$ 时达到最小. 此时,

$$\mathbf{P} = \left[\sum_{i=1}^2 (\mathbf{I} - \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i^T) \right]^{-1} \cdot \left[\sum_{i=1}^2 (\mathbf{I} - \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i^T) \mathbf{P}_{i0} \right] \quad (15)$$

因此, 定理 1 的结论成立.

下面证明满足式 (15) 的点就是两条直线的公垂线的中点.

定理 2 设 3 维欧氏空间中直线 T_i 的单位方向向量为 $\mathbf{N}_i, i = 1, 2$, 则当 $|\mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_2| < 1$ 时, 点 P

$(P = \left[\sum_{i=1}^2 (I - N_i N_i^T) \right]^{-1} \cdot \left[\sum_{i=1}^2 (I - N_i N_i^T) P_{i0} \right])$ 是直线 T_1 和 T_2 的公垂线段的中点. 其中, P_{i0} 为直线 T_i 上的任一点, $i = 1, 2$.

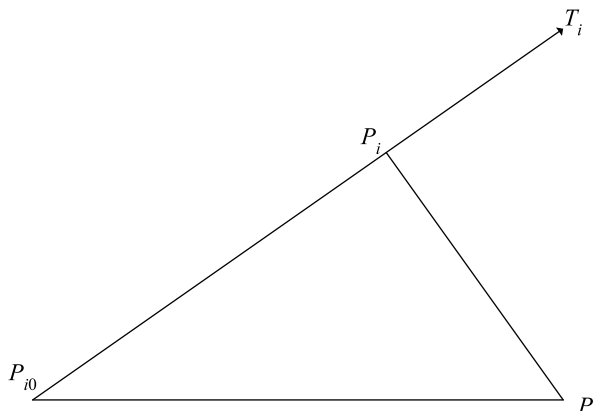


图 2 某点到直线的距离
Fig.2 The distance between a point and a line

证明: 由引理 3 知, 对单位向量 N_1, N_2 而言, 当 $|N_1^T N_2| < 1$ 时, $\sum_{i=1}^2 (I - N_i N_i^T)$ 正定, 故 $\sum_{i=1}^2 (I - N_i N_i^T)$ 可逆. 因此, 满足式 (15) 的点 P 一定存在.

由于 $N_i^T (P - P_{i0})$ 是标量, 因此, 图 2 中的垂足 P_i 满足如下等式:

$$P_i = P_{i0} + N_i^T (P - P_{i0}) N_i = P_{i0} + N_i N_i^T (P - P_{i0})$$

因此, 有

$$P - P_i = (I - N_i N_i^T) (P - P_{i0}) \quad (16)$$

将式 (15) 代入式 (16) 并令 $i = 1$, 可以得到:

$$\begin{aligned} P - P_1 &= (I - N_1 N_1^T) \left(\left[\sum_{j=1}^2 (I - N_j N_j^T) \right]^{-1} \cdot \left[\sum_{j=1}^2 (I - N_j N_j^T) P_{j0} \right] - P_{10} \right) \\ &= (I - N_1 N_1^T) \left(\left[\sum_{j=1}^2 (I - N_j N_j^T) \right]^{-1} \cdot \left[\sum_{j=1}^2 (I - N_j N_j^T) P_{10} + (I - N_2 N_2^T) (P_{20} - P_{10}) \right] - P_{10} \right) \\ &= (I - N_1 N_1^T) \left[\sum_{i=1}^2 (I - N_i N_i^T) \right]^{-1} (I - N_2 N_2^T) (P_{20} - P_{10}) \end{aligned} \quad (17)$$

同理可以得到:

$$P - P_2 = (I - N_2 N_2^T) \left[\sum_{i=1}^2 (I - N_i N_i^T) \right]^{-1} \cdot (I - N_1 N_1^T) (P_{10} - P_{20}) \quad (18)$$

记 $F = I - N_1 N_1^T, G = I - N_2 N_2^T$, 可以将式 (17)、(18) 重写为:

$$\begin{aligned} P - P_1 &= F(F + G)^{-1} G(P_{20} - P_{10}) \\ P - P_2 &= G(F + G)^{-1} F(P_{10} - P_{20}) \end{aligned}$$

又由于:

$$\begin{aligned} F(F + G)^{-1} G &= (F + G - G)(F + G)^{-1} G \\ &= G - G(F + G)^{-1} G \\ G(F + G)^{-1} F &= G(F + G)^{-1} (F + G - G) \\ &= G - G(F + G)^{-1} G \end{aligned}$$

所以有: $P - P_1 = P_2 - P, P = \frac{1}{2} (P_1 + P_2)$.

这表明, 点 P 就是这两条直线的公垂线段 $P_1 P_2$ 的中点. 因此, 定理 2 的结论成立.

由定理 1 和定理 2 知, 当两条直线互不平行时, 式 (15) 给出的到两条直线的距离的平方和达到最小的点 P 的坐标就是这两条直线的公垂线段 $P_1 P_2$ 的中点的坐标. 但式 (15) 需要矩阵求逆运算, 下面给出不需矩阵求逆运算的一个公垂线中点法的简便计算公式.

定理 3 设 3 维欧氏空间中直线 T_i 的单位方向向量为 $N_i, i = 1, 2$, 则当 $|N_1^T N_2| < 1$ 时, 点 $P (P = \left[\sum_{j=1}^3 \lambda_j^{-1} V_j V_j^T \right] \cdot \left[\sum_{i=1}^2 (I - N_i N_i^T) P_{i0} \right])$ 是直线 T_1 和 T_2 的公垂线段的中点. 其中, P_{i0} 为直线 T_i 上的任一点, $i = 1, 2$.

$$V_1 = \frac{N_1 + N_2}{\|N_1 + N_2\|}, V_2 = \frac{N_1 - N_2}{\|N_1 - N_2\|}, V_3 = \frac{N_1 \times N_2}{\|N_1 \times N_2\|} \quad (19)$$

$$\lambda_1 = 1 - N_1^T N_2, \lambda_2 = 1 + N_1^T N_2, \lambda_3 = 2 \quad (20)$$

证明: 由 $(N_1 + N_2)^T (N_1 \times N_2) = (N_1 - N_2)^T (N_1 \times N_2) = (N_1 + N_2)^T (N_1 - N_2) = 0$ 知, 向量 $N_1 + N_2, N_1 - N_2, N_1 \times N_2$ 相互正交.

又由引理 2 知, 当 $|N_1^T N_2| < 1$ 时, 向量 $N_1 + N_2, N_1 - N_2, N_1 \times N_2$ 是对应于矩阵 $\sum_{i=1}^2 (I - N_i N_i^T)$ 的特征根 $\lambda_j, j = 1, 2, 3$ 的特征向量. 因此, $V_j, j = 1, 2, 3$ 是 3 阶矩阵 $\sum_{i=1}^2 (I - N_i N_i^T)$ 的对应于特征根 $\lambda_j, j = 1, 2, 3$ 的 3 个相互正交的单位特征向量.

由引理 3 知, 3 阶矩阵 $\sum_{i=1}^2 (I - N_i N_i^T)$ 正定. 因此, $\sum_{i=1}^2 (I - N_i N_i^T)$ 对称, 可逆.

根据以上分析可得, $(\lambda_j)^{-1}, j = 1, 2, 3$ 是 3 阶对称矩阵 $\left[\sum_{i=1}^2 (I - N_i N_i^T) \right]^{-1}$ 的特征根, $V_j, j = 1, 2, 3$ 是 3 阶对称矩阵 $\left[\sum_{i=1}^2 (I - N_i N_i^T) \right]^{-1}$ 的对应于特征根 $(\lambda_j)^{-1}, j = 1, 2, 3$ 的 3 个相互正交的单位特征向量.

因此, 有

$$\left[\sum_{i=1}^2 (I - N_i N_i^T) \right]^{-1} = \sum_{j=1}^3 \lambda_j^{-1} V_j V_j^T$$

将上式代入式 (15), 有

$$P = \left(\sum_{j=1}^3 \lambda_j^{-1} V_j V_j^T \right) \cdot \left[\sum_{i=1}^2 (I - N_i N_i^T) P_{i0} \right] \quad (21)$$

这样, 由定理 2 知, 定理 3 的结论成立.

定理 3 指出, 式 (21) 为 $|N_1^T N_2| < 1$ 时的公垂线中点法的计算公式.

当 $|N_1^T N_2| = 1$ 时, 以 N_1 和 N_2 为单位方向向量的两条直线相互平行. 此时, 可以认为这两条直线相交于无穷远点. 因此, 可以认为无穷远点为这两条直线的交点.

由于式 (21) 直接给出了点 P 的坐标, 避免了式 (15)、(8) 和 (9) 中的矩阵求逆运算, 因此由式 (21) 给出的公垂线中点法的计算公式是一种比式 (8) 给出的最小二乘法 and 式 (9) 给出的归一化最小二乘法都要简便的物点定位计算公式.

下面, 本文给出相应的公垂线中点法的快速物点定位算法.

公垂线中点法的快速物点定位算法:

- (a) 由式 (10) ~ (14) 确定出 3 维单位向量 N_1 和 N_2 . 当 $|N_1^T N_2| < 1$ 时, 转 (b); 当 $|N_1^T N_2| = 1$ 时, 转 (e).
- (b) 令 P_{10} 是世界坐标系中左相机 C_L 的位置 O_L , P_{20} 是世界坐标系中右相机 C_R 的位置 O_R .
- (c) 由式 (19)、(20) 确定出标量 λ_j 和 3 维单位向量 $V_j, j = 1, 2, 3$.
- (d) 由式 (21) 确定出公垂线中点法给出的物点 P 的定位坐标. 算法结束.
- (e) 确定无穷远点为物点 P 的定位坐标. 算法结束.

从式 (10) ~ (14)、(19) ~ (21) 可看出, 和最小二乘法以及归一化的最小二乘法相比, 本文给出的公垂线中点法的快速物点定位算法仅需要 3 维向量的叉积运算和单位化运算, 避免了最小二乘法以及归一化的最小二乘法的物点定位算法中的矩阵求逆运算. 因此, 这种快速物点定位算法计算简单, 易于实现.

3 实验设计及结果分析 (Experiment design and result analysis)

本节先设定实验设计中的各种坐标系, 再描述摄像机 C_L 与 C_R 的内外参数的设定方法, 并给出了投影矩阵 M^L 与 M^R 的设定方法, 然后描述物点 P 的像点 p_L 与 p_R 的齐次坐标 $(u_L, v_L, 1)^T$ 与 $(u_R, v_R, 1)^T$ 的设定方法, 接着描述了各种参数的噪声的添加方式、实验设计方法和实验结果等.

3.1 坐标系

在图 1 中, 设左摄像机坐标系 $O_L-X_L Y_L Z_L$ 为世界坐标系, 右摄像机坐标系 $O_R-X_R Y_R Z_R$ 由世界坐标系经过旋转和平移变换得到, 旋转矩阵为 H , 平移向量为 E . 设 $(x, y, z)_R^T$ 是空间中任一物点在右摄像机坐标系下的坐标, $(x, y, z)_L^T$ 是该点在左摄像机坐标系即世界坐标系下的坐标, 则有

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R = H \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_L + E \quad (22)$$

记右摄像机 C_R 在世界坐标系下的坐标为 $(x_{c2}, y_{c2}, z_{c2})^T$.

3.2 摄像机内外参数及投影矩阵的设定

投影矩阵 M 可以表示为 $M = M_1 M_2$, 其中:

$$M_1 = \begin{pmatrix} \alpha_x & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & \alpha_y & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} H & E \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$H = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \psi + \sin \gamma \sin \theta \sin \psi & -\cos \gamma \sin \psi + \sin \gamma \sin \theta \cos \psi & -\sin \gamma \cos \theta \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \\ \sin \gamma \cos \psi - \cos \gamma \sin \theta \sin \psi & -\sin \gamma \sin \psi - \cos \gamma \sin \theta \cos \psi & \cos \gamma \cos \theta \end{pmatrix} \quad (25)$$

其中, M_1 是摄像机的内参数矩阵, M_2 是摄像机外参数矩阵, $\mathbf{0}$ 为 1 行 3 列的零矩阵, θ, γ, ψ 是 3 个旋转角度.

设定 $\alpha_x = \alpha_y = 1000, u_0 = v_0 = 0, \theta = 3^\circ, \gamma = 2^\circ, \psi = -3^\circ$, 则

$$E = -H \cdot \begin{pmatrix} x_{C2} \\ y_{C2} \\ z_{C2} \end{pmatrix} \quad (26)$$

因此, 在设定以上参数后, 可得到如下形式的投影矩阵:

$$M^L = M_1, \quad M^R = M_1 M_2 \quad (27)$$

3.3 物点和像点坐标的设定

在世界坐标系下, 在球心为 $(0,0,0)^T$ 、半径为 400 mm 的球面上, 使 $z > 0$, x 和 y 从 -100 mm 到 100 mm 以 25 mm 为粒度变化, 可设定 81 个物点的真实的 3 维坐标.

对于每一个给定的物点 P 在世界坐标系下的真实的 3 维坐标 $(x, y, z)^T$, 可以利用式 (22) ~ (27) 和式 (1)、(2) 得到对应于该物点的两个同名像点 p_L 和 p_R 的真实的齐次坐标 $(u_L, v_L, 1)^T$ 和 $(u_R, v_R, 1)^T$.

3.4 噪声的添加

为模拟实际应用情况, 在 3 个旋转角度 θ, γ, ψ 上叠加噪声扰动. 然后由式 (23) ~ (27) 可以得到含

噪声扰动的投影矩阵 M^R . 在 p_R 的坐标 u_R, v_R 上叠加白噪声, 可以得到含噪声扰动的坐标 u_R, v_R .

3.5 实验步骤与结果

将 M^L 和 u_L, v_L 以及含噪声扰动的 M^R 和 u_R, v_R 代入式 (3) ~ (6), 分别采用式 (8)、(9) 和 (21) 求取物点的 3 维坐标的估计值. 然后, 计算物点的 3 维坐标的估计值与真实值之间的误差. 在相同的噪声条件下, 记录每种方法所产生的误差的最小值、最大值和平均值, 以及误差的标准差. 这里的误差是指物点的 3 维坐标的估计值与真实值之间的欧氏距离.

共进行了 3 组实验, 每组实验统计 81 次. 每次实验中均在真实的 u_R, v_R 上叠加了均值为 0、标准差为 σ 的高斯噪声. 在第 2 和第 3 组的每次实验中还在真实的 θ, γ, ψ 上叠加了均值为 0° 、标准差为 0.057° 的高斯噪声.

3 组实验中分别设定右摄像机 C_R 的世界坐标系坐标 $(x_{C2}, y_{C2}, z_{C2})^T$ 为 $(0, 10, 10)^T, (10, 10, 0)^T, (10, 10, 10)^T$.

实验结果如表 1 ~ 3 所示. 由表 1 ~ 3 可以看出, 公垂线中点算法的误差的均值和标准差都是最小的. 分析实验得到的数据可知, 与最小二乘法和归一化的最小二乘法相比, 本文给出的公垂线中点法的快速算法除了具有计算简单、易于实现的优点外, 还能够在有噪声影响的情况下, 较好地重建出空间物点的 3 维信息, 具有较高的稳定性. 也就是说, 这种公垂线中点法的快速算法能够得到较高精度的物点定位的 3 维坐标值, 具有较好的抗噪性.

表 1 第 1 组实验的对比结果

Tab.1 The comparison result of the first group of experiments

	最小二乘法		归一化的最小二乘法		公垂线中点算法	
	$\sigma = 1.0$	$\sigma = 2.0$	$\sigma = 1.0$	$\sigma = 2.0$	$\sigma = 1.0$	$\sigma = 2.0$
误差平均值	14.494126	28.734098	14.495098	28.27311	14.493507	28.721508
误差标准差	9.714930	19.140451	9.680050	19.051938	9.679187	19.007380
误差最小值	0.643195	0.480744	0.874447	0.900471	0.990049	1.357094
误差最大值	47.172624	84.668565	47.156047	84.643953	47.051499	84.474033

表 2 第 2 组实验的对比结果

Tab.2 The comparison result of the second group of experiments

	最小二乘法		归一化的最小二乘法		公垂线中点算法	
	$\sigma = 1.0$	$\sigma = 2.0$	$\sigma = 1.0$	$\sigma = 2.0$	$\sigma = 1.0$	$\sigma = 2.0$
误差平均值	13.354818	21.907469	13.312460	21.824697	13.303969	21.811290
误差标准差	9.322783	16.601732	9.293562	16.595917	9.293707	16.577166
误差最小值	0.443742	0.835589	0.429929	0.834623	0.429776	0.742309
误差最大值	37.531946	71.585549	37.392972	71.599929	37.410573	71.347868

表3 第3组实验的对比结果

Tab.3 The comparison result of the third group of experiments

	最小二乘法		归一化的最小二乘法		公垂线中点算法	
	$\sigma = 1.0$	$\sigma = 2.0$	$\sigma = 1.0$	$\sigma = 2.0$	$\sigma = 1.0$	$\sigma = 2.0$
误差平均值	14.002801	22.954286	13.947025	22.848004	13.943159	22.826034
误差标准差	10.022540	17.802179	10.014790	17.762388	10.007417	17.727852
误差最小值	0.342706	0.505904	0.328997	0.504824	0.317699	0.423639
误差最大值	50.305209	86.299765	50.488310	86.430987	50.537195	86.434664

4 总结 (Conclusion)

在双目立体视觉中,物点定位的精度将直接影响到整个视觉系统的重建精度.本文给出了公垂线中点法的一种快速算法,并与最小二乘法和归一化的最小二乘法等物点定位算法进行了分析和比较.理论分析和对比实验表明,本文提出的公垂线中点法的快速算法不仅计算简单、易于实现,而且在数据含噪声的情况下,能够得到较高精度的数据,具有较好的实用价值.

参考文献 (References)

- [1] 马颂德,张正友.计算机视觉——计算理论与算法基础[M].北京:科学出版社,1998.
- [2] Yuan M L, Ong S K, Nee A Y C. Registration based on projective reconstruction technique for augmented reality systems[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2005, 11(3): 254~264.
- [3] Zheng Z Y. Determining the epipolar geometry and its uncertainty: A review[J]. International Journal of Computer Vision, 1998, 27(2): 161~195.
- [4] 张钧,刘小茂,柳健.一种新的三维表面重建方法——基础矩阵法的研究[J].红外与激光工程,2001,30(1): 8~11.

- [5] Faugeras O D. What can be seen in three dimensions with an uncalibrated stereo rig?[A]. Lecture Notes in Computer Science (vol.588)[M]. Berlin, Germany: Springer, 1992. 563~578.
- [6] Hu Y Q, Rajan D, Chia L T. Robust subspace analysis for detecting visual attention regions in images[A]. Proceedings of the 13th Annual ACM International Conference on Multimedia[C]. New York, NJ, USA: ACM, 2005. 716~724.
- [7] Wang J, Li T F, Lu H B, *et al.* Penalized weighted least-squares approach to sinogram noise reduction and image reconstruction for low-dose X-ray computed tomography[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2006, 25(10): 1272~1283.
- [8] Chan M H, Lin W M, Zhou C H, *et al.* Miniaturized three-dimensional endoscopic imaging system based on active stereovision[J]. Applied Optics, 2003, 42(10): 1888~1898.
- [9] Trucco E, Verri A. Introductory Techniques for 3-D Computer Vision[M]. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 1998.

作者简介:

张钧(1966-),男,博士后,副教授.研究领域为机器视觉,机器学习,数据挖掘.

张宏(1983-),男,硕士.研究领域为机器视觉.

刘小茂(1965-),女,博士,副教授.研究领域为统计学习理论与金融风险管理.