

先介绍几个概念，首先是比例带

$$\delta = \frac{\frac{y_2 - y_1}{y_{\max} - y_{\min}}}{\frac{u_2 - u_1}{u_{\max} - u_{\min}}}$$

比例带是一个无量纲的纯数值，其物理意义为：调节阀从全开到全关（输出做全程范围变化时），输入（被控量）的变化占其全程变化范围的百分数。如输入为温度，输出为阀门开度，1-100 摄氏度量程，如希望温度从 15——20 度变化时，阀门从全开到全关，比例带为 5%。

以智能车速度控制为例，控制量占空比从 0-100%变化，如设定速度值为 60，测量值为 40 则 100%占空比加速，测量值为 80 则 0 占空比。即速度从 80 变化到 40，占空比从 0 变化到 100%，则比例带为 40%。

比例带反映的是对误差的敏感程度，比例带越小，对误差越敏感。对误差越敏感，越容易引起震荡。

以下是 PID 的公式

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

当然在单片机中，积分用求和来完成，微分用做差来完成。

www.gvrtool.com

$$u(k) = k_p e(k) + k_i \sum_{j=0}^k e(j) + k_d (e(k) - e(k-1))$$

其中

$$K_p = 1/\delta$$

KP 为比例带的倒数，比例带越小，KP 越大，对误差越敏感。

$$K_i = \frac{K_p T}{T_i} \text{为积分系数}$$

其中 T 为采样时间，若 10ms 测速一次，则 T=10ms，Ti 为积分时间，积分时间约大，积分作用越弱。

Ti 积分时间的物理意义为，当误差不变的情况下，积分作用达到和比例控制相同的效果所需的时间。

例如，当误差为 5%时，比例控制给出 100%的控制量，若不考虑比例控制，只用积分，同样是 5%的误差且不变，当积分时间为 5s 时，也能达到 100%，不过需要 5s 的时间。

也就是说，当误差一定时，比例控制会立刻起作用，而积分控制也能达到和比例相同的效果，但是需要经过一定时间，这个时间就是积分时间。这一点从公式中推导一样可以得到这个结论。

引入的积分的目的是消除稳态误差。一般的空调控制，只用 PI 即可，智能车控制则方向一般用 PD，速度可用 PI，也可用 PID。

若使用 PI 控制，位置式的缺点就是积分饱和，也就是当控制量已经达到最大时，误差仍然在积分作用下继续累积，一旦误差开始反向变化，则系统需要较长时间从饱和区退出。当 $u(k)$ 达到最大和最小时，需要停止积分作用，否则进入饱和时，则难以对误差的变化有快速的反应。如采用增量式则可以消除这个问题。

从位置式的公式即可推导

$$\Delta u(k) = k_p(e(k) - e(k-1)) + k_d(e(k) - 2e(k-1) + e(k-2))$$

以智能车速度控制为例，使用增量式 PI

$$\begin{aligned} \Delta u(k) = u(k) - u(k-1) &= K_p(e(k) + \frac{T}{T_i} \sum_{j=0}^k e(j)) - K_p(e(k-1) + \frac{T}{T_i} \sum_{j=0}^{k-1} e(j)) = \\ &= K_p(e(k) - e(k-1)) + \frac{K_p T}{T_i} e(k) = K_1 e(k) - K_2 e(k-1) \end{aligned}$$

$$\text{其中 } K_1 = K_p \left(1 + \frac{T}{T_i}\right)$$

$$K_2 = K_p$$

自己确定好比例带和积分时间，测量周期，很容易就可以确定公式中的几个参数，当然需要经过大量实验来实现参数的最优化。