

平方根容积卡尔曼滤波器*

郝燕玲 杨峻巍 陈 亮 郝金会

(哈尔滨工程大学 哈尔滨 150001)

摘 要: 针对容积卡尔曼滤波器在递推过程中, 计算量大、数值不稳定等问题, 提出了平方根容积卡尔曼滤波器。该滤波器不仅增强了数值鲁棒性, 确保了状态协方差矩阵的正定性, 且在一定程度上提高了滤波精度。仿真结果表明, 该滤波器的滤波精度与容积卡尔曼滤波相比提高了约 10%, 且均高于扩展卡尔曼滤波; 随着状态维数的增加, 该滤波器的估计性能越加优于扩展卡尔曼滤波器。因此对系统维数较高的场合, 该滤波器是一种非常有效的非线性滤波算法。

关键词: 容积卡尔曼滤波; 平方根滤波; 贝叶斯估计; 数值稳定性; 球面径向容积规则

中图分类号: TN713; V448 文献标志码: A

Square Root Cubature Kalman Filter

HAO Yanling ,YANG Junwei ,CHEN Liang ,HAO Jinhui

(Harbin Engineering University ,Harbin 150001 ,China)

Abstract: In view of the problems of numerical instability and large amount of computation in recursive process , the modified square root cubature Kalman filter was put forward. The modified filter not only enhances the numerical stability , guarantees positive definiteness of the state covariance , but also increases accuracy. The simulation shows that the accuracy of the filter is higher than that of cubature Kalman filter , and the accuracy of cubature Kalman filter is higher than that of the extended Kalman filter; with the increase of dimension of nonlinear system , the estimation performance of the modified filter is better than that of the extended Kalman filter. The modified filter is an effective nonlinear filtering algorithm for high dimension of nonlinear system.

Keywords: cubature Kalman filter; square root filter; Bayesian estimation; numerical stability; spherical-radial rule

0 引言

非线性滤波在信号处理、目标跟踪以及卫星导航等领域有着广泛的应用。其中最常用的非线性滤波算法是扩展卡尔曼滤波(EKF),但在处理强非线性系统时,EKF会导致很大线性化误差,造成滤波精度降低,甚至发散^[1]。针对EKF的不足,Sigma-Point卡尔曼滤波(SPKF)被提出,其利用加权统计线性回归技术,通过一组确定性采样点来捕获系统的相关统计参量^[2-4]。最近,文献[5]提出了一种全新的非线性滤波方法,即容积卡尔曼滤波器(CKF)。然而CKF在递推过程中,存在计算量大及数值不稳定等缺点,为此借鉴平方根滤波的思想,提出了一种基于平方根滤波的容积卡尔曼滤波器。

1 容积卡尔曼滤波器

由贝叶斯估计原理可知,基于高斯假设的贝叶斯

滤波估计算法其核心在于求解具有“非线性函数×高斯密度”形式被积函数的加权积分,这是高斯域贝叶斯估计算法所具备的基本特性。

考虑一多维加权积分,其基本形式如下:

$$I(f) = \int_D f(x) w(x) dx \quad (1)$$

其中D为积分区域,并且对于任意 $x \in D$ 的权重函数 $w(x)$ 已知。假定 $w(x)$ 具有高斯特性则上式所示即为一高斯加权积分问题。对于上式积分问题通常采用数值积分计算方法。该方法的基本问题是确定一组点集及其相应的权值以用于近似求解,即:

$$I(f) = \sum_{i=1}^m w_i f(x_i) \quad (2)$$

CKF就是基于上述基本问题,采用一种基于求积原理的方法解决非线性滤波的基本问题。

1.1 求容积规则

考虑下边的求积分问题:

* 收稿日期: 2011-05-24
基金项目: 国家自然科学基金(160040300008)资助
作者简介: 郝燕玲(1944-),女,山东莱州人,教授,研究方向: 导航、制导与控制。

$$I(f) = \int_{R^n} f(\mathbf{x}) \exp(-\mathbf{x}^T \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3)$$

为了计算上述积分问题,首先要将其变换至一个更为通用的球面径向积分形式,该变换需要将 \mathbf{x} 分解为一个与半径 r 和方向向量 \mathbf{y} 相关的过程。

假设 $\mathbf{x} = r\mathbf{y}$ $\mathbf{y}^T \mathbf{y} = 1$ 则上式积分可写为:

$$I(f) = \int_0^\infty \int_{U_n} f(r\mathbf{y}) r^{n-1} \exp(-r^2) d\sigma(\mathbf{y}) dr \quad (4)$$

其中: U_n 表示半径为 1 的球表面 $\sigma(\cdot)$ 为属于积分域 U_n 的元素。

$$I = \int_0^\infty S(r) r^{n-1} \exp(-r^2) dr \quad (5)$$

$$S(r) = \int_{U_n} f(r\mathbf{y}) d\sigma(\mathbf{y}) \quad (6)$$

针对上两式,分别采用 m_r 点 Gauss-Hermite 求积规则 and m_s 点 Spherical 规则,可得到 $m_r \times m_s$ 点的 Spherical-Radial 求容积规则为:

$$\int_0^\infty S(r) r^{n-1} \exp(-r^2) dr = \sum_{i=1}^{m_r} a_i S(r_i) \quad (7)$$

$$\int_{U_n} f(r\mathbf{y}) d\sigma(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{m_s} b_j f(r\mathbf{y}_j) \quad (8)$$

$$I(f) = \int_{R^n} f(\mathbf{x}) \exp(-\mathbf{x}^T \mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \sum_{j=1}^{m_s} \sum_{i=1}^{m_r} a_i b_j f(r_i \mathbf{y}_j) \quad (9)$$

取 $m_r = 1, m_s = 3$, 可得到 3 自由度的 Spherical-Radial 求容积规则。

根据上述求容积规则 n 维标准状态分布与非线性函数乘积的积分可近似为:

$$I(f) = \int_{R_n} f(\mathbf{x}) N(\mathbf{x}; 0, \mathbf{I}_n) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{2n} w_i f(\xi_i) \quad (10)$$

当随机变量 \mathbf{x} 服从 $N(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ 的分布时,可得:

$$\int_{R_n} f(\mathbf{x}) N(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) d\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^{2n} w_i f(\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}} \xi_i + \boldsymbol{\mu}) \quad (11)$$

其中: $\xi_i = \sqrt{n} [1]_i; w_i = \frac{1}{2n} \quad i = 1, 2, \dots, 2n; [1] \in R_n$ 且:

$$[1]_i \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad (12)$$

1.2 容积卡尔曼滤波

考虑如下的非线性离散状态空间模型:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (13)$$

将求容积计算积分的思想应用于高斯贝叶斯估计,即可得到如下标准 CKF 算法:

1) 时间更新

$$\mathbf{P}_{k-1|k-1} = \mathbf{S}_{k-1|k-1} \mathbf{S}_{k-1|k-1}^T \quad (14)$$

$$\mathbf{X}_{i,k-1|k-1} = \mathbf{S}_{k-1|k-1} \boldsymbol{\xi}_i + \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \quad (15)$$

$$\mathbf{X}_{k-1|k-1}^* = f(\mathbf{X}_{i,k-1|k-1}) \quad (16)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{X}_{i,k|k-1}^* \quad (17)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{X}_{i,k|k-1}^* \mathbf{X}_{i,k|k-1}^{*T} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (18)$$

2) 量测更新

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{S}_{k|k-1} \mathbf{S}_{k|k-1}^T \quad (19)$$

$$\mathbf{X}_{i,k|k-1} = \mathbf{S}_{k|k-1} \boldsymbol{\xi}_i + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \quad (20)$$

$$\mathbf{Z}_{i,k|k-1} = h(\mathbf{X}_{i,k|k-1}) \quad (21)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{Z}_{i,k|k-1} \quad (22)$$

$$\mathbf{P}_{zz,k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{Z}_{i,k|k-1} \mathbf{Z}_{i,k|k-1}^T - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^T + \mathbf{R}_k \quad (23)$$

$$\mathbf{P}_{xz,k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{X}_{i,k|k-1} \mathbf{Z}_{i,k|k-1}^T - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^T \quad (24)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xz,k|k-1} \mathbf{P}_{zz,k|k-1}^{-1} \quad (25)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}) \quad (26)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{zz,k|k-1} \mathbf{K}_k^T \quad (27)$$

2 平方根容积卡尔曼滤波

考虑到实际工程应用中,需要克服舍入误差引起的滤波发散,借鉴 Kalman 滤波中平方根滤波的思想,提出了平方根容积卡尔曼滤波 (SRCKF)。其与 CKF 相比,有以下优点: 1) 在滤波过程中直接以协方差矩阵的平方根形式进行递推更新,因而可以降低计算复杂度,获得更高的效率; 2) 能保证协方差矩阵的非负定性,有效的避免了滤波器的发散,提高了滤波的收敛速度和数值稳定性。

借鉴文献 [2] 中平方根无迹卡尔曼滤波的推导,可推得 SRCKF 算法的具体实现如下:

1) 假设 $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Z}_{k-1}) = N(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1})$ 已知,分解因式可得:

$$S_{k-1|k-1} = \text{chol}(P_{k-1|k-1}) \quad (28)$$

2) 计算 cubature 点

$$X_{i \ k|k-1} = S_{k-1|k-1} \xi_i + \hat{x}_{k-1|k-1} \quad (29)$$

3) 传播 cubature 点

$$X_{i \ k|k-1}^* = f(X_{i \ k|k-1}) \quad (30)$$

4) 计算状态预测

$$\hat{x}_{k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_{i \ k|k-1}^* \quad (31)$$

5) 计算估计预测误差协方差矩阵的平方根

$$\chi_{k|k-1}^* = \frac{1}{\sqrt{2n}} [X_{1 \ k|k-1}^* - \hat{x}_{k|k-1} \quad X_{2 \ k|k-1}^* - \hat{x}_{k|k-1} \\ \cdots X_{2n \ k|k-1}^* - \hat{x}_{k|k-1}] \quad (32)$$

$$S_{k|k-1} = \text{qr}\{[\chi_{k|k-1}^* \quad \sqrt{Q_k}]\} \quad (33)$$

6) 计算 cubature 点

$$X_{i \ k|k-1} = S_{k|k-1} \xi_i + \hat{x}_{k|k-1} \quad (34)$$

7) 传播 cubature 点

$$Z_{i \ k|k-1} = h(X_{i \ k|k-1}) \quad (35)$$

8) 计算量测估计值

$$\hat{z}_{k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} Z_{i \ k|k-1} \quad (36)$$

9) 计算新息协方差矩阵的平方根:

$$\eta_{k|k-1} = \frac{1}{2n} [Z_{1 \ k|k-1} - \hat{z}_{k|k-1} \quad Z_{2 \ k|k-1} - \hat{z}_{k|k-1} \\ \cdots Z_{2n \ k|k-1} - \hat{z}_{k|k-1}] \quad (37)$$

$$S_{zz \ k|k-1} = \text{qr}\{[\eta_{k|k-1} \quad \sqrt{R_k}]\} \quad (38)$$

10) 计算互协方差矩阵的平方根

$$\chi_{k|k-1} = \frac{1}{\sqrt{2n}} [X_{1 \ k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1} \quad X_{2 \ k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1} \\ \cdots X_{2n \ k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1}] \quad (39)$$

$$P_{xz \ k|k-1} = \chi_{k|k-1} \eta_{k|k-1}^T \quad (40)$$

11) 卡尔曼滤波增益

$$K_k = (P_{xz \ k|k-1} / S_{zz \ k|k-1}^T) / S_{zz \ k|k-1} \quad (41)$$

12) 计算状态估计值

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(z_k - \hat{z}_{k|k-1}) \quad (42)$$

13) 计算状态估计误差协方差矩阵

$$U = K_k S_{zz \ k|k-1} \quad (43)$$

$$S_{k|k} = \text{cholupdate}\{S_{k|k-1}, U, -1\} \quad (44)$$

$$\begin{cases} x_k = 0.2x_{k-1} + 0.01x_{k-1}^2 + 8\cos(1.2k) + w_k \\ y_k = x_k^2 + v_k \end{cases}$$

其中 w_k 和 v_k 均为零均值的高斯白噪声,方差分别为 10 和 0.01;真实的系统初始状态 $x_0 = 0.2$,滤波初始化的先验状态为 $x_{0|0} \sim N(0.5, 2)$ 。仿真步长为 50 步,进行 50 次蒙特卡罗仿真。

图 1 给出了三种滤波器估计与真实状态的比较,可以看出 SRCKF 与真实状态最接近。图 2 给出了三种算法的均方根误差曲线,从图 2 可以看出 SRCKF 的均方根误差最小,CKF 的均方根误差次之,EKF 的均方根误差最大。

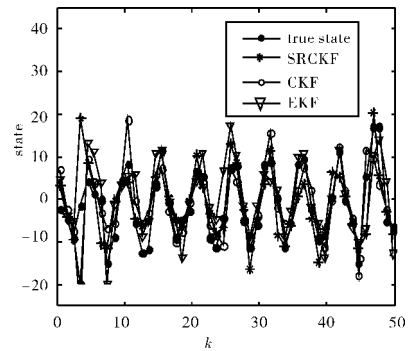


图 1 真实状态与三种算法的估计值比较

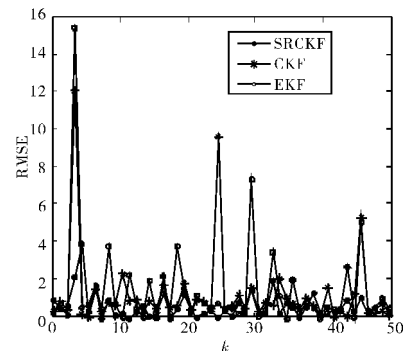


图 2 三种算法的均方根误差图

表 1 定量的给出了各种算法的估计精度及计算复杂度。从表 1 不难看出,在估计精度上,SRCKF 的估计精度最高,比 CKF 的估计精度提高了约 10%,而 CKF 的估计精度与 EKF 相比稍高。在计算复杂度上,EKF 的计算量最小,SRCKF 的计算量与 CKF 相比也有了明显减小。

表 1 三种算法均方根误差均值和运行时间对比

	RMSE	TIME/s
EKF	2.221	0.0057
CKF	2.112	0.0153
SRCKF	1.935	0.0102

3 仿真分析

通过非线性系统的状态估计,将 SRCKF 与 EKF, CKF 等算法进行仿真实验比较。分别采用一维和多维的非线性系统实例进行仿真。

3.1 一维非线性系统实例

系统模型如下:

3.2 多维非线性系统

为了进一步验证平方根 CKF 算法在多维非线性系统中滤波的优越性,这里采用著名的自由落体运动跟踪模型作为仿真实例。模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + w_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = \rho_0 \exp(-x_1(t)/k) x_2^2(t) / 2x_3(t) - g + w_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = w_3(t) \\ y_k = \sqrt{M^2 + (x_1(t_k) - a)^2 + v_k} \end{cases}$$

其中: $\rho_0 = 2g = 32.2\text{ft/s}^2$ $k = 20000\text{ft}$ $M = 100000\text{ft}$ $a = 100000\text{ft}$

过程噪声和量测噪声为均值为零的高斯白噪声,且满足 $E[v_k^2] = 10000\text{ft}^2$ $E[w_i^2(t)] = 0$ ($i = 1, 2, 3$)。

滤波初始值设定如下:

$$x_0 = [300000 \quad -200000 \quad 0.001]^T$$

$$P_0 = \text{diag}[10^6 \quad 4 \times 10^6 \quad 10]$$

通过 50 次蒙特卡罗仿真可以得到 EKF、CKF、SRCKF 的系统状态估计误差曲线如图 3 和图 4 所示。

从图 3 和图 4 不难看出 SRCKF 的高度均方根误差和速度均方根误差均比 EKF 和 CKF 相应的数值小,且收敛速度也比较快。与 EKF 相比,SRCKF 在滤波估计精度上有了明显的提高,与 CKF 相比,SRCKF 不仅减少了计算量,而且精度也有所提高。

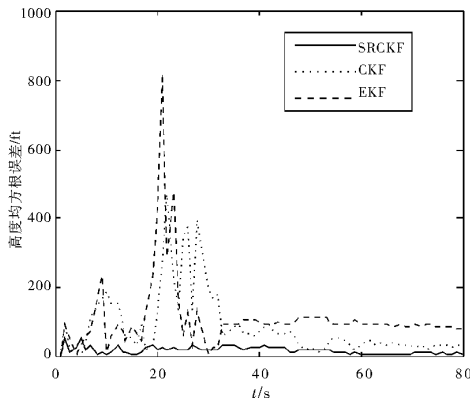


图 3 高度估计误差

4 结论

容积卡尔曼滤波器在非线性系统滤波过程,存在计算量大、数值不稳定等缺点。为此,基于平方根滤波的思想,提出了平方根容积卡尔曼滤波器。仿真结

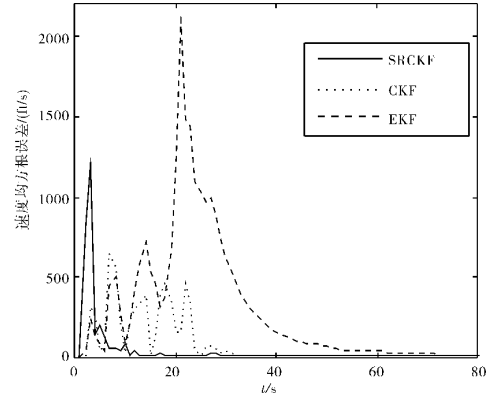


图 4 速度估计误差

果表明,当系统状态维数较低时,SRCKF 与 EKF 相比,精度提高有限。而随着维数的增加,SRCKF 与 EKF 相比估计精度有很大的提高。因此 SRCKF 更适用于维数较高的非线性系统滤波估计。与 CKF 相比,SRCKF 在保证滤波精度的同时,不仅降低了滤波的计算量,而且提高了数值稳定性。因此 SRCKF 是一种非常有效的非线性滤波方法。为了进一步提高 SRCKF 在噪声统计不准确或滤波对初始值过于敏感等情况下的滤波精度,需要在鲁棒性方面做进一步的改进。

参考文献:

- [1] 柴霖,袁建平,罗建军,等. 非线性估计理论的最新进展[J]. 宇航学报, 2005, 26(3): 380-384.
- [2] Van der Merwe R, Wan E A. The square-root unscented Kalman filter for state and parameter estimation [C] // Proc. IEEE International Conference on ICASSP, 2001: 3461-3464.
- [3] 邹益民. 基于平方根无迹滤波的滚转弹姿态估计[J]. 弹箭与制导学报, 2010, 30(4): 41-44.
- [4] R van der Merwe. Sigma-point Kalman filters for probabilistic inference in dynamic state-space models [D]. Portland, OR, USA: OGI School of Science&Engineering at Oregon Health&Science University, 2004.
- [5] Jenkaran Arasaratnam, Simon Haykin. Cubature Kalman filters[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(6): 1254-1269.