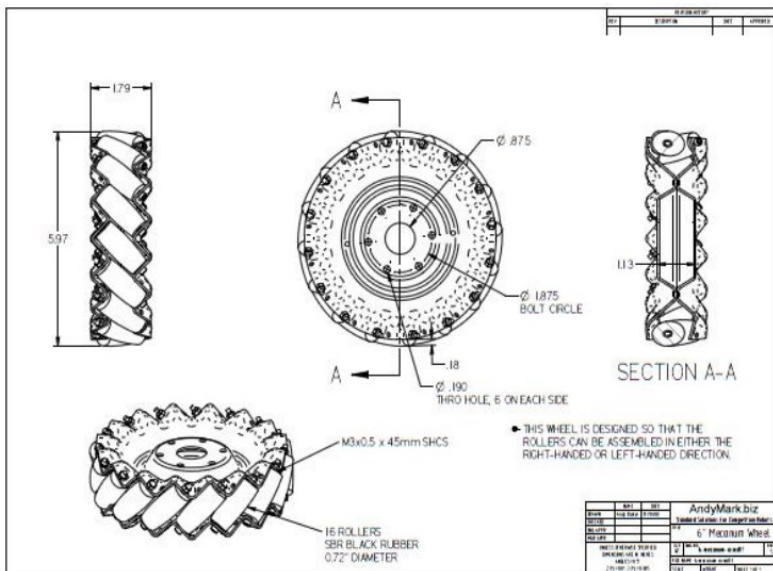
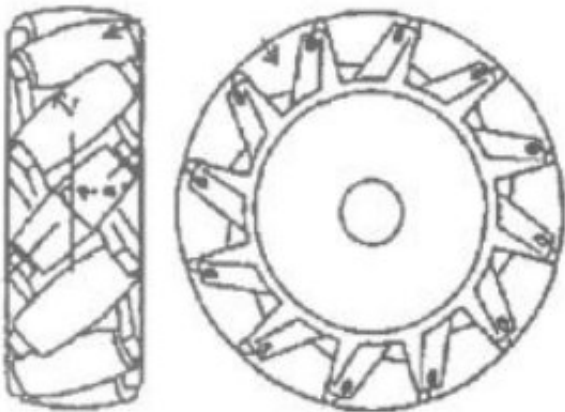


# 1. 麦克纳姆轮的原理

麦克纳姆轮是瑞典麦克纳姆公司的专利，图 3-6 为它的结构简图。在它的轮缘上斜向分布着许多小滚子，故轮子可以横向滑移。小滚子的母线很特殊。当轮子绕着固定的轮心轴转动时，各个小滚子的包络线为圆柱面，所以该轮能够连续地向前滚动。麦克纳姆轮结构紧凑、运动灵活，是很成功的一种全方位轮。由四个这种轮加以组合，可以使机构实现全方位移动功能。



## 2. 麦克纳姆全向行走底盘构造的运动学分析

### 1、系统运动学解析

为了得到一般情况下的四轮全方位系统运动学方程，设四轮的布局形式是

随意排列的，每轮在系统中既有相对机体中心的位置，也有姿态角度。设第  $i$  轮在机体坐标系中的位姿如图 3-8 所示。设第  $i$  轮的结构示意如图 3-9 所示。各结构参数和运动参数定义如下：

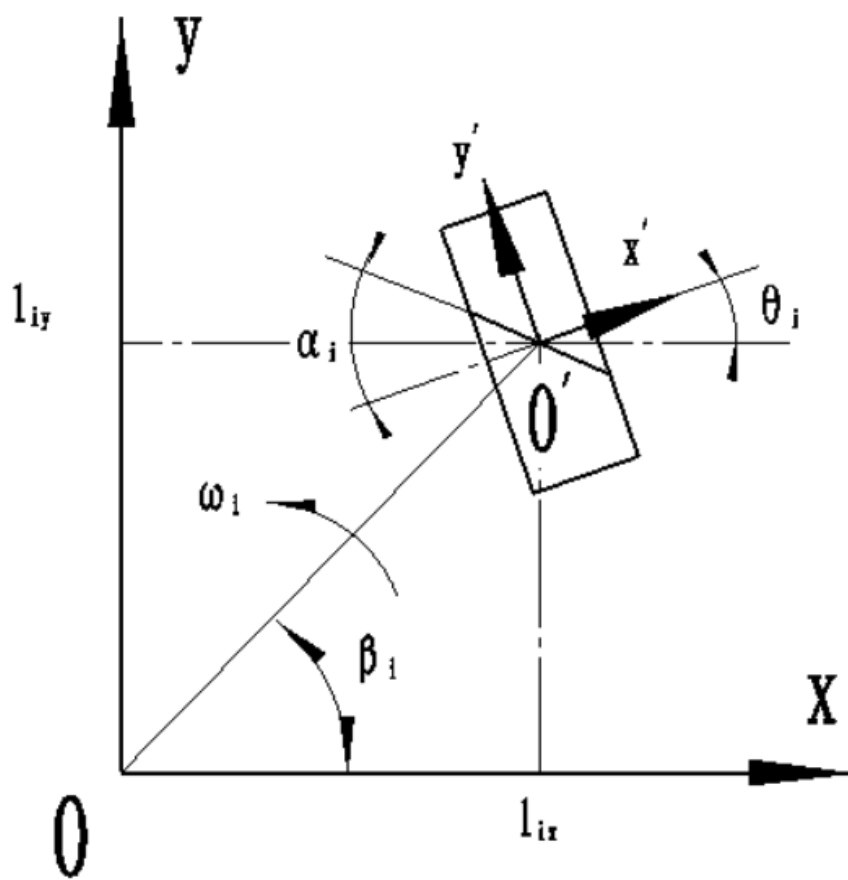


图 3-8 第  $i$  轮与系统中心的运动关系

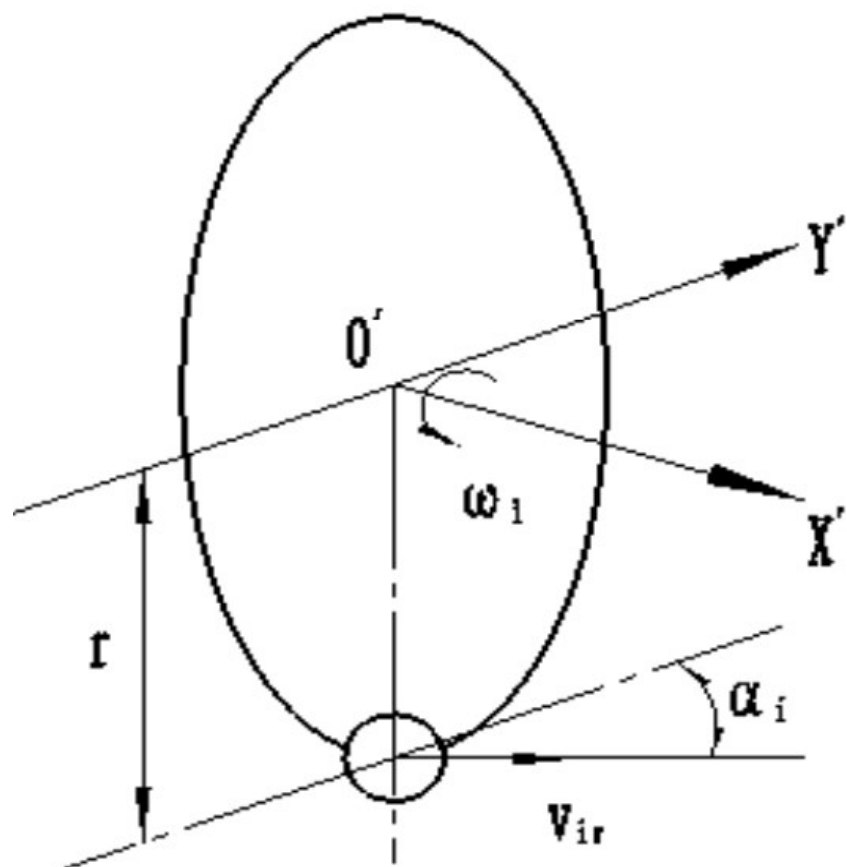


图 3-9 第  $i$  轮结构

$O, O'$  ——系统运动中心及轮  $i$  旋转轴中心,

$xoy$  ——与运动中心固联的直角坐标系,

$x'o'y'$  ——与轮毂中心  $o'$  固联的坐标系,

$(l_{ix}, l_{iy}, \theta_i)$  —— $x'o'y'$  坐标系在  $xoy$  中的位姿描述,

$\alpha_i$  ——第  $i$  轮驱动辊子偏置角,

$r$  ——轮作用半径,

$V_{ir}$  —— 第  $i$  轮工作辊子的中心速度矢量,

$\beta_i$  ——  $\overline{OO'}$  与  $x$  轴夹角,

$[v_x \quad v_y \quad \omega]^T$  ——  $O$  点的广义速度,

$[v'_{ix} \quad v'_{iy} \quad \omega'_i]^T$  ——  $o'$  点在  $x'o'y'$  中的广义速度,

$[v_{ix} \quad v_{iy} \quad \omega_i]^T$  ——  $o'$  点在  $xoy$  中广义速度。

据图 3-9, 有

$$\begin{bmatrix} v'_{ix} \\ v'_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin \alpha_i \\ r & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_i \\ v_{ir} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{i1} \begin{bmatrix} \omega_i \\ v_{ir} \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

将轮毂中心速度转换到 XOY 坐标系中, 有

$$\begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_{ix} \\ v'_{iy} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{i2} \mathbf{R}_{i1} \begin{bmatrix} \omega_i \\ v_{ir} \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

因机器人做平面运动, 有

$$\begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -l_{iy} \\ 0 & 1 & l_{ix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{i3} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

由 (2) (3) 得机器人逆运动学方程

$$\mathbf{R}_{i2} \mathbf{R}_{i1} \begin{bmatrix} \omega_i \\ v_{ir} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{i3} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix}, i=1,2,3,4 \quad (3-4)$$

因:  $\det(\mathbf{R}_{i1}) \neq 0, \det(\mathbf{R}_{i2}) \neq 0$ ,

令:  $\mathbf{R}_i = [\mathbf{R}_{i2}]^{-1} [\mathbf{R}_{i1}]^{-1} \cdot \mathbf{R}_{i3}$

$$l_{ix} = l_i \cos \beta_i, l_{iy} = l_i \sin \beta_i$$

有第  $i$  轮的逆运动学方程为:

$$\begin{bmatrix} \omega_i \\ \mathbf{v}_{ir} \end{bmatrix} = [\mathbf{R}_{i2}]^{-1} \cdot [\mathbf{R}_{i1}]^{-1} \cdot \mathbf{R}_{i3} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

$$\mathbf{R}_i = \frac{1}{-r \sin \alpha_i} \begin{bmatrix} \cos(\theta_i - \alpha_i) & \sin(\theta_i - \alpha_i) & -l_{iy} \cos(\theta_i - \alpha_i) + l_{ix} \sin(\theta_i - \alpha_i) \\ r \cos \theta_i & -r \sin \theta_i & -l_{iy} \cdot r \cos(\theta_i) - l_{ix} \cdot r \sin \theta_i \end{bmatrix}$$

轮转速到中心的逆运动学解为:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} = \frac{-1}{r} \begin{bmatrix} \frac{\cos(\theta_1 - \alpha_1)}{\sin \alpha_1} & \frac{\sin(\theta_1 - \alpha_1)}{\sin \alpha_1} & \frac{l_1 \sin(\theta_1 - \alpha_1 - \beta_1)}{\sin \alpha_1} \\ \frac{\cos(\theta_2 - \alpha_2)}{\sin \alpha_2} & \frac{\sin(\theta_2 - \alpha_2)}{\sin \alpha_2} & \frac{l_2 \sin(\theta_2 - \alpha_2 - \beta_2)}{\sin \alpha_2} \\ \frac{\cos(\theta_3 - \alpha_3)}{\sin \alpha_3} & \frac{\sin(\theta_3 - \alpha_3)}{\sin \alpha_3} & \frac{l_3 \sin(\theta_3 - \alpha_3 - \beta_3)}{\sin \alpha_3} \\ \frac{\cos(\theta_4 - \alpha_4)}{\sin \alpha_4} & \frac{\sin(\theta_4 - \alpha_4)}{\sin \alpha_4} & \frac{l_4 \sin(\theta_4 - \alpha_4 - \beta_4)}{\sin \alpha_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

系统逆运动学方程雅克比矩阵为:

$$\mathbf{R} = \frac{-1}{r} \begin{bmatrix} \frac{\cos(\theta_1 - \alpha_1)}{\sin \alpha_1} & \frac{\sin(\theta_1 - \alpha_1)}{\sin \alpha_1} & \frac{l_1 \sin(\theta_1 - \alpha_1 - \beta_1)}{\sin \alpha_1} \\ \frac{\cos(\theta_2 - \alpha_2)}{\sin \alpha_2} & \frac{\sin(\theta_2 - \alpha_2)}{\sin \alpha_2} & \frac{l_2 \sin(\theta_2 - \alpha_2 - \beta_2)}{\sin \alpha_2} \\ \frac{\cos(\theta_3 - \alpha_3)}{\sin \alpha_3} & \frac{\sin(\theta_3 - \alpha_3)}{\sin \alpha_3} & \frac{l_3 \sin(\theta_3 - \alpha_3 - \beta_3)}{\sin \alpha_3} \\ \frac{\cos(\theta_4 - \alpha_4)}{\sin \alpha_4} & \frac{\sin(\theta_4 - \alpha_4)}{\sin \alpha_4} & \frac{l_4 \sin(\theta_4 - \alpha_4 - \beta_4)}{\sin \alpha_4} \end{bmatrix}$$

## 2、系统运动性能的判定条件

当系统逆运动学雅可比矩阵列不满秩时，系统中存在奇异位形，使系统的运动自由度减少。对于麦克纳姆轮四轮全方位运动系统，因逆运动学方程反映四个轮转速与系统中心速度的映射关系，雅可比矩阵的性质也反映了系统的运动特性。对全方位行走系统来说，若系统逆运动学方程的雅可比矩阵列不满秩时，系统也具有奇异位形，反映在运动学上就是失去部分自由度，即系统不能实现全方位运动。因此为使系统确保有三个自由度的全方位运动。针对四轮运动系统，可得到系统实现全方位运动的必要条件如下：

1. 雅可比矩阵  $R$  列满秩，即  $\text{rank}(R) = 3$ ，则系统具有实现全方位运动的能力。
2. 雅可比矩阵列不满秩，即  $\text{rank}(R) < 3$ ，系统中存在奇异位形，不能实现全方位运动。

## 3、满足系统驱动性能的结构条件

对于具有实际用途的四轮系统，系统仅满足运动学必有条件还不够，系统必须具有很好的驱动性能和控制性。

为了使系统制造经济合理，所有麦克纳姆轮的辊子偏置角  $\alpha_i$  取相同的数值，且将轮结构对称设计，安装时只要采用正反安装法，就可得到实际上的大小相等而方向相反两种辊子偏置角 ( $+\alpha$ )。另外，为实现各轮的载荷均匀，系统的支撑结构稳定，一般常采取四个轮子关于车体几何中心（坐标系  $xoy$ ）对称布置的轮结构布局形式。即使这样规定，但四轮系统的布局结构仍然有许多种组合形式。各种形式中驱动性能有很大的区别。因麦克纳姆轮全方位系统在某些运动方向上存在欠驱动是其自身的特点，系统驱动性能的好坏的设计原则是：

1. 在三个自由度方向上，若系统的四个轮都是驱动轮则驱动性能良好。
2. 即使有欠驱动，欠驱动的方向应处于次要的运动方向上。

## 4、麦克纳姆轮布局结构形式选择

### 1) 主要介绍六种典型四轮系统结构形式

图 3-12 列举出六种典型的具有代表性的轮组结构布局方式，图中标号 1、2、3、4 的方框表示四个轮子，方框中斜线表示各轮接触地面时辊子偏置角方向（在俯视图上接触地面的辊子方向与轮子上表面的辊子方向相

反)。6种布局下的结构参数及相应的逆运动学雅可比矩阵  $R$  的秩  $\text{rank}(R)$  数值计算列于表 1。

## 2) 运动学特性选择

系统结构形式的优选首先看是否能满足全方位运动的必有条件。从表 3-1 知：六种结构中只有图(a)，图(b)、图(d)三种结构形式的逆运动学雅可比矩阵的秩  $\text{rank}(R)=3$ ，也就是列满秩，存在广义逆阵。其它 3 种结构形式的雅可比矩阵均不满秩，因此系统中必存在奇异位形，因而在某些方向上不能实现运动，也即是不能实现全方位运动。另外从矩阵不满秩的 3 种情况可以观察出其共同特点是：轮子上辊子的方向都是同向安装的，很显然系统不能实现平面三自由度全方位运动，必有条件同实际相符。

## 3) 驱动性能选择

对上述满足系统运动学必有条件的三种结构形式再结合系统驱动性能选择说明如下：

图 3-10(a)布局结构形式中，当四个轮呈正方形布局，且辊子偏置角全部取  $45^\circ$  时，则系统失去了定轴旋转能力。原因是在正方形布局结构形式下，因四个轮的速度方向  $v_1, v_2, v_3, v_4$  与运动中心共线，无论各轮的速度大小如何改变，都不能实现绕  $O$  点的旋转运动。因而系统不能实现全方位运动。也就是说这种布局结构虽然系统逆运动学雅可比矩阵的秩  $\text{rank}(R)=3$ ，列满秩，但仍然具有局限性。因而不是最优结构。

图 3-10(d)的四轮布局结构形式，虽然能实现全方位运动，但从系统驱动性能方面考虑，效果较差一些，当实现  $x, y$  方向的运动时，必有两轮作为驱动，其余两个轮处于与地面的滑动摩擦状态，显然对系统的运动起到了阻碍作用，使得系统的驱动效果较差。如系统要沿  $x$  方向运动时，只有轮 1, 2 是驱动轮，轮 3, 4 必须处于零转速，滑动摩擦状态。沿  $y$  轴运动时，轮运动状态正好相反。

综合运动可行性及系统驱动性能，最好的四轮结构布局形式是图 3-10(b)的结构形式。

图 3-10(b)的结构形式实现全方位运动的原理如图 3-5 所示。由图 3-5 显然可见系统能实现  $x$  ,  $y$  方向的直线运动, 也能实现绕中心  $O$  点的定点旋转。三个方向的运动中, 系统所有轮都是驱动轮。系统不仅能实现全方位运动, 且驱动性能较好, 是最优结构布局形式。

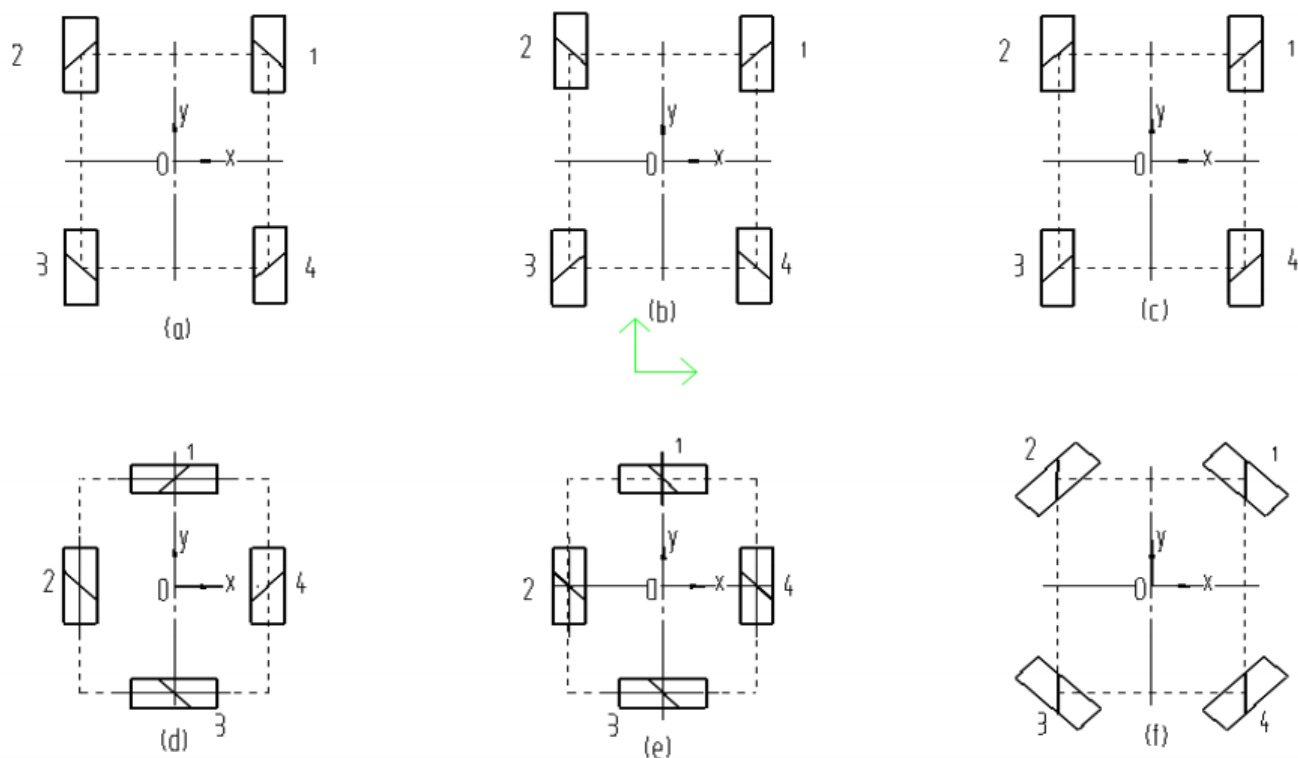


图 3-10 六种典型麦克纳姆四轮结构布局形式

结构形式	各轮的结构参数及 $rank(\mathbf{R})$ 值												
	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$rank(\mathbf{R})$
a	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$0^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	$\alpha$	$-\alpha$	$\alpha$	$-\alpha$	3
b	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$0^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	$-\alpha$	$\alpha$	$-\alpha$	$\alpha$	3
c	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$0^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	$-\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	2
d	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$0^\circ$	$90^\circ$	$0^\circ$	$90^\circ$	$0^\circ$	$\alpha$	$\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	3
e	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$0^\circ$	$90^\circ$	$0^\circ$	$90^\circ$	$0^\circ$	$-\alpha$	$\alpha$	$-\alpha$	$\alpha$	2
f	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$45^\circ$	$-45^\circ$	$45^\circ$	$-45^\circ$	$\alpha$	$-\alpha$	$\alpha$	$-\alpha$	2



表 3-1 六种典型结构形式结构参数与  $rank(R)$  值

注：表中为注明具体角度值的  $\alpha_i, \beta_i$  可取任意锐角值，结果不变。

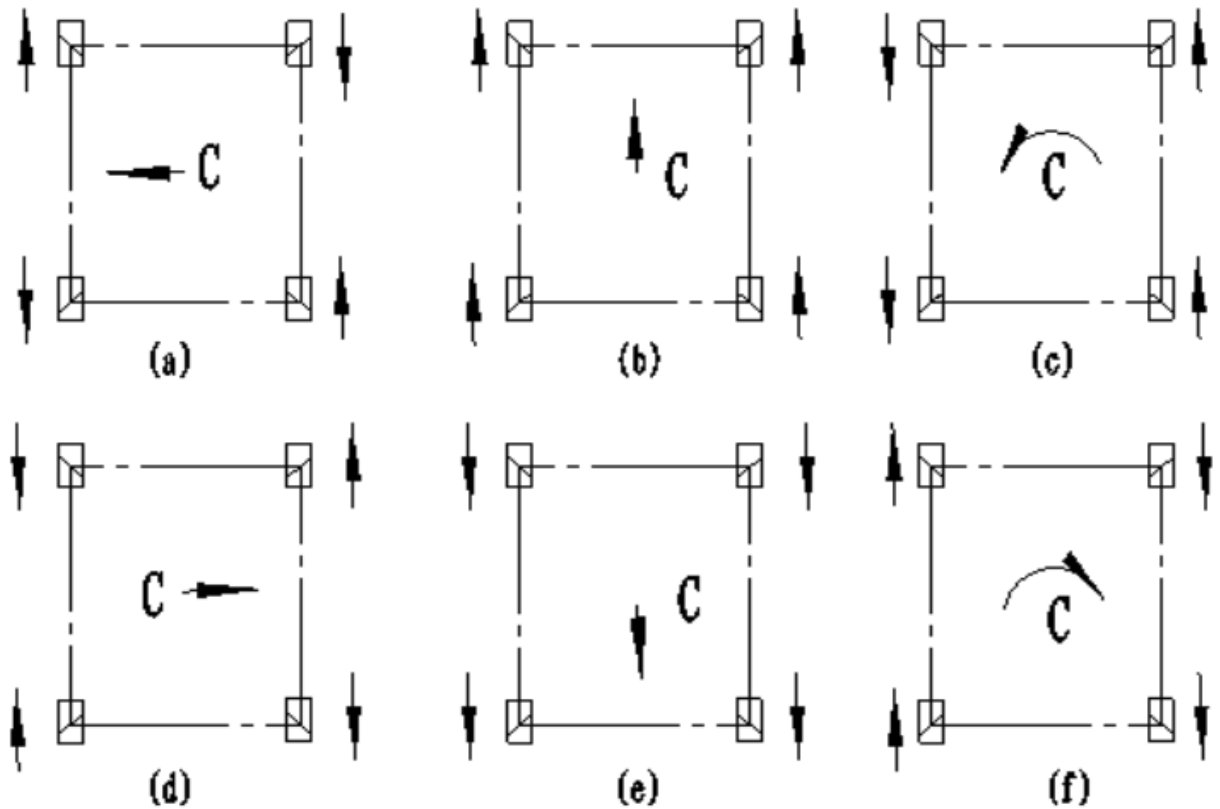


图 3-11 结构形式的全方位运动图解

四轮麦克纳姆轮全方位运动系统的轮组布局形式多种多样，并不是每一种布局形式都能实现全方位运动，判定系统实现全方位运动性能优劣的必要条件是：系统逆运动学雅克比矩阵是否列满秩。满足必要条件后还必须根据系统的驱动性能综合优选其结构布局形式。从运动性能和驱动性能两方面综合选择，六种常见的布局结构形式中最优的布局结构形式如图 3-11(b)所示。麦克纳姆轮结构特点决定了麦克纳姆轮系统具有上述的特殊运动性能和结构特征。