麦克纳姆轮参数探索

玩过麦克纳姆轮的朋友们都很了解麦克纳姆轮特性，在这里我就不谈这个了，不了解的朋友们可以先查查相关资料了解。在这里我只针对本人对麦克纳姆轮参数的探索的琐事进行一个说明，探索麦克纳姆轮相关参数，以便用于建模，对于想要 3D 打印麦克纳姆轮的朋友们相信也是有好处的。

1、首先，对于麦克纳姆轮而言，轮毂的参数没有任何难度，这里就不做阐述了，我只针对参数复杂的小胶轮参数谈谈我的探索之路。

小胶轮是旋转体，而且还是对称的，在此申明：本文均是按图 1 坐标系确定小胶轮参数，探究小胶轮参数实质就是求在s_0处截面圆半径r_0。小胶轮轴线与麦克纳姆轮轴线间距为H，麦克纳姆轮半径为R。

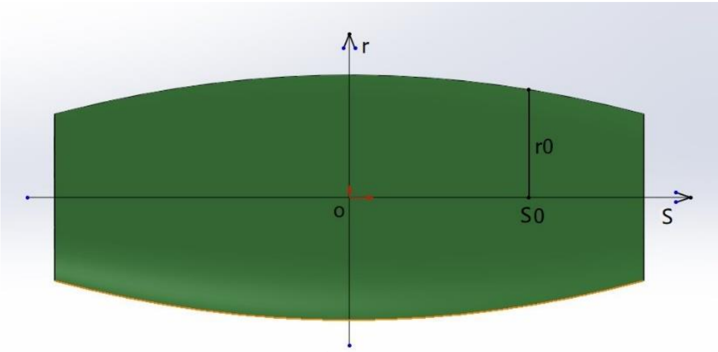

图 1

2、寻找半径最好的方法就是运用麦克纳姆轮的特性构建实体模型，从中寻找扫描曲线。在这里我所使用的是 SolidWorks 建模软件，如图 2 所示，先建立一个长圆柱体，以与之成45°的基准面构建麦轮旋转体草图，将其沿外切除得到如图 3 所示模型。

之前在论坛上找到一个麦轮模型，打开发现小胶轮母线直接采用图 3 模型与过轴线和最高点的平面的相交线，其实质是错误的，正确的取法应该是：正视端面，如图 4 所示，过端面外圆圆心画与切除轮廓线相切的圆，此圆方才是小胶轮在该端面处的截面圆，相对于之前的曲面与平面直接相交形成的半径小。当然，如果只是做小模型麦轮，之前的那种近似方法也是可以使用的，建模方法简单，只是建模步骤较为繁杂，个人并不喜欢，至于为何是相切圆我就不阐述了，读者自己细想便能明白。

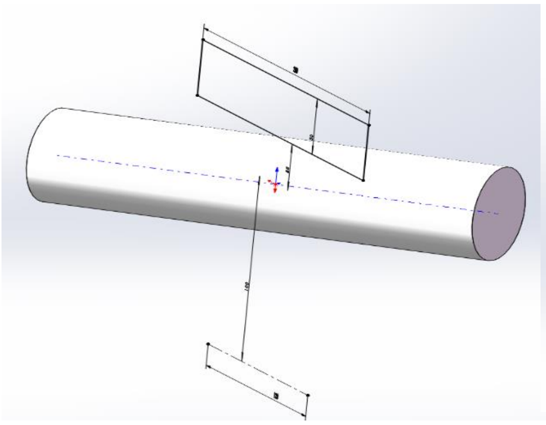

图 2

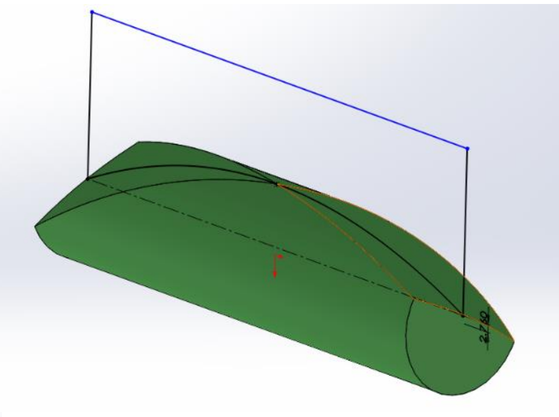

图 3

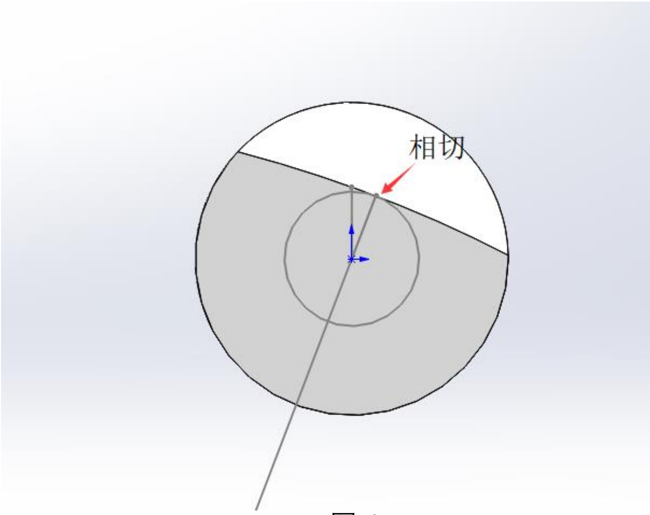

图 4

3、寻找到了小胶轮截面圆，便开始构建各种几何关系，从而得到了图 5 的几何关系图。图 6 和图 7 分别是图 5 的俯视图和正视椭圆面的图形，以供参考。

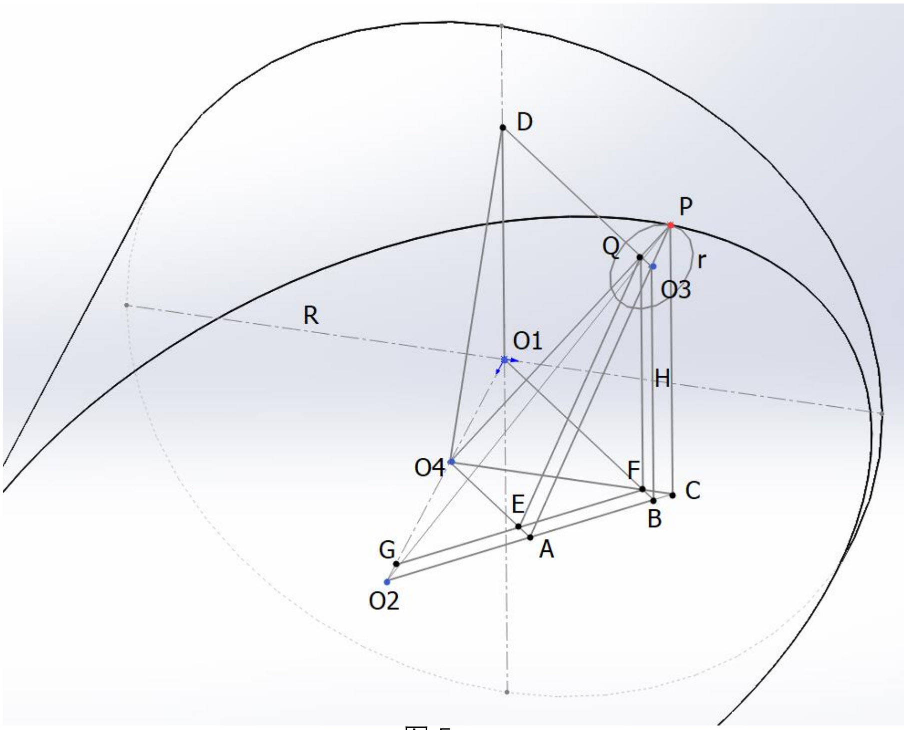

图 5

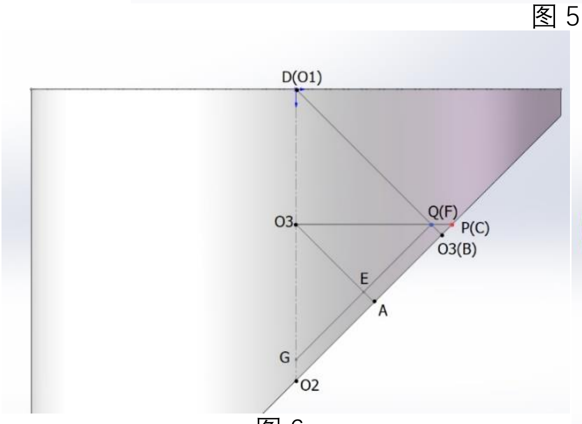

图 6

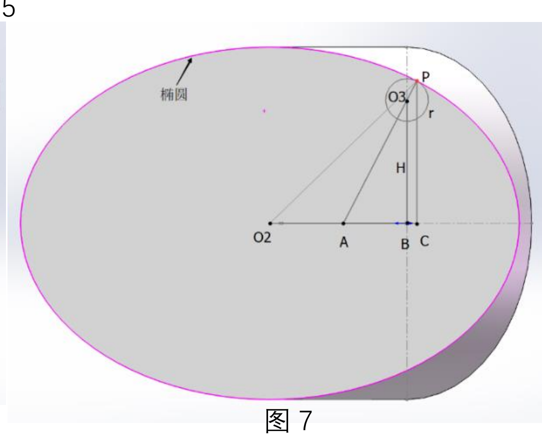

图 7

4、在画图过程中发现DO_3与PO_4是相交于点Q的，在此给出证明如下：

证明：一个圆柱体斜切后，切面形状为椭圆，如图 2 所示，沿45°切割圆柱后，横截面椭圆方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=R^2$.

小胶轮在O_3处垂直于轴的横截圆面外轮廓与过O_3点的45°切割椭圆面外轮廓一定相切与一点P。因此AP为椭圆在P点处的法线。

设P点坐标为(x_0,y_0)，易知椭圆方程为$x^2+2y^2=2R$，

P点处切线方程为$xx_0+2yy_0=0$. 故P点处法线方程为$y-y_0=\frac{2y_0}{x_0}(x-x_0)$.

因此A点横坐标为$x_A=\frac{1}{2}x_0$，即A点为CO_2中点。

所以，在$Rt\Delta CO_2O_4$中，$AO_4\perp CO_2$，即有$AO_4\parallel BO_1\parallel DO_3$.

由于 P点在AO_3线上，故DO_3与PO_4属于同一平面且相交于点Q，证毕。

5、模型建立完成后，接下来便是求解小胶轮母线参数了，小胶轮母线参数实质就是求在O_3点处截面圆半径$r=PO_3$，以下用两种方法进行相关计算：

方法一：设$O_1O_4=FO_4=b$，有$O_1F=DQ=\sqrt{2}b$，$DO_4=QO_4=\sqrt{H^2+b^2}$.

所以$s=QO_3+DQ=\sqrt{2}b+QO_3$.

而在O_3处的半径$r=O_3P$.

在ΔPQO_3中，$PO_3\perp QO_3$，固有$QO_3=PQ\times cos\angle PQO_3$，$r=PO_3=PQ\times sin\angle PQO_3$.

而$PQ=PO_4-QO_4=R-\sqrt{H^2+b^2}$.

由于DO_3与PO_4相交于点Q点，因此有$\angle PQO_3=\angle DQO_4$，

在ΔDQO_4中$DO_4=QO_4=\sqrt{H^2+b^2}$，$DQ=\sqrt{2}b$.

所以$cos\angle PQO_3=cosDQO_4=\frac{\sqrt{2}b}{2\sqrt{H^2+b^2}}$，而$sin\angle PQO_3=sin\angle DQO_4=\frac{\sqrt{H^2+\frac{1}{2}b^2}}{\sqrt{H^2+b^2}}$.

所以$s=\sqrt{2}b+\left(R-\sqrt{H^2+b^2}\right)\frac{\sqrt{2}b}{2\sqrt{H^2+b^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}b\left(1+\frac{R}{\sqrt{H^2+b^2}}\right)$,

$r=\left(R-\sqrt{H^2+b^2}\right)\frac{\sqrt{H^2+\frac{1}{2}b^2}}{\sqrt{H^2+b^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2H^2+b^2}\left(\frac{R}{\sqrt{H^2+b^2}}-1\right)$.

即$\begin{cases} s=\frac{\sqrt{2}}{2}b\left(1+\frac{R}{\sqrt{H^2+b^2}}\right) \\ r=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2H^2+b^2}\left(\frac{R}{\sqrt{H^2+b^2}}-1\right) \end{cases}$（$b$为参数），其中$b_{max}=\sqrt{R^2-H^2}$.

方法二：椭圆参数方程为$\begin{cases} x=\sqrt{2}Rsin\theta \\ y=Rcos\theta \end{cases}$（$\theta$为参数），$P$点坐标为$(x_0,y_0)$，即$\left(\sqrt{2}Rsin\theta_0,Rcos\theta_0\right)$。

有$tan\angle PAC=\frac{2y_0}{x_0}=\frac{H}{AB}=\frac{y_0-H}{BC}$，得$BC=\frac{1}{2}x_0-\frac{Hx_0}{2y_0}$.

所以$s_0=DO_3=BO_2=x_0-BC=\frac{1}{2}x_0+\frac{Hx_0}{2y_0}=\frac{\sqrt{2}}{2}Rsin\theta_0+\frac{\sqrt{2}}{2}Htan\theta_0$.

由$tan\angle PAC=\frac{2y_0}{x_0}$，得$sin\angle PAC=\frac{2y_0}{\sqrt{x_0^2+4y_0^2}}$

故$r_0=\frac{y_0-H}{sin\angle PAC}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{R^2+y_0^2}\left(1-\frac{H}{y_0}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+cos^2\theta_0}\left(R-\frac{H}{cos\theta_0}\right).$

即$\begin{cases} s=\frac{\sqrt{2}}{2}Rsin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}Htan\theta \\ r=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+cos^2\theta}\left(R-\frac{H}{cos\theta}\right) \end{cases}$（$\theta$为参数）

由$\frac{2y_0}{x_0}=\frac{H}{AB}$和$AB=\frac{\sqrt{2}}{2}b$得$tan\theta=\frac{b}{H}=\frac{FO_4}{FQ}=\tan\angle FQO_4$

而$\tan\angle FQO_{4max}=\frac{\sqrt{R^2-H^2}}{H}$，因此$\theta_{max}=arctan\frac{\sqrt{R^2-H^2}}{H}$.

6、验证环节：以上两种方法算出的答案是一致的，有兴趣的朋友可以自己算算。小胶轮母线参数公式求出来了，接下来便是实物模型验证环节。

6.1、打开 SolidWorks，新建模型，首先建立小胶轮模型。新建草图，点击样条曲线的下三角选择 方程式驱动的曲线 ，如图 8 所示

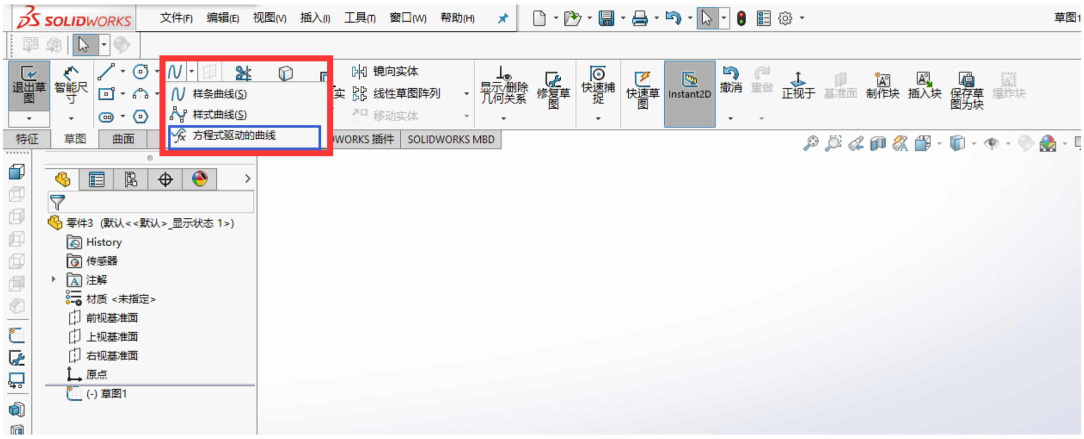

图 8

6.2、在“设计树”选择参数性，如图 9 所示，在这里我运用方法二计算的公式建模，按照参数$R=125, H=100, \theta_{max}=0.6435$，在参数栏中四个对话框中分别填入以下信息：

(125*sin(t)+100*tan(t))/2^0.5

(1+(cos(t))^2)^0.5*(125-100/cos(t))/2^0.5

-0.6

0.6

此处的范围必须满足最大值，否则模型会出错

注意：此处信息读者可直接复制验证，SolidWorks 在此处方程写入有格式要求，读者可自行上网查询，错误信息 SolidWorks 也会以红色提醒。

将草图封闭，并画出构造线，如图 10 所示，退出草图，用旋转特征构建三维实体模型，如图 11 所示。

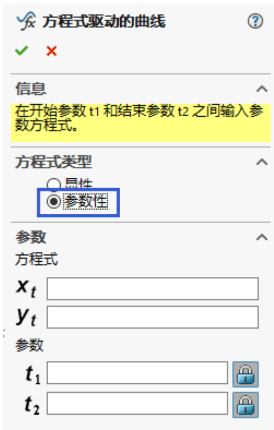

图 9

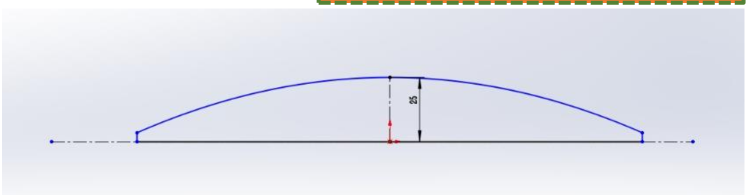
图 10

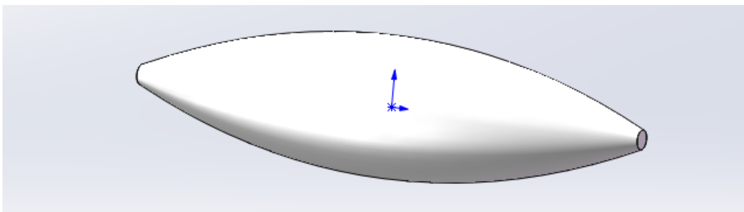
图 11

6.3、以前视基准面和右视基准面相交画出基准轴，并以该基准轴与前视基准面，建立与前视基准面成45°的基准面，如图 12 所示。

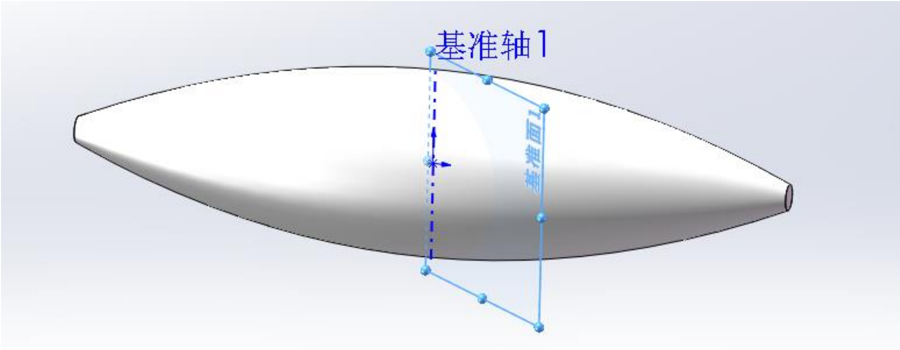

图 12

6.4、在新建基准面上新建草图，画一圆，圆心在基准轴线上，直径为$2R=250$，圆心距原点$H=100$，如图 13 所示。放大局部可以发现小胶轮轮廓投影与该圆完全重合，如图 14 所示。

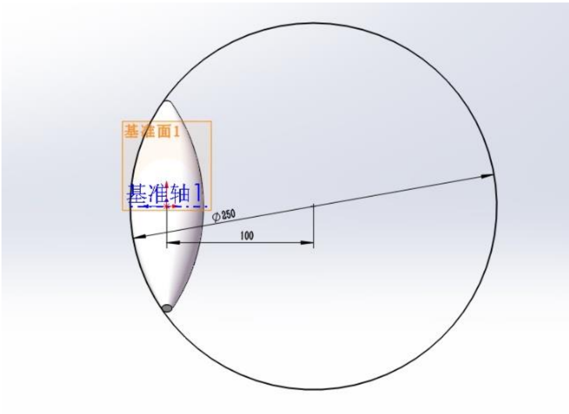

图 13

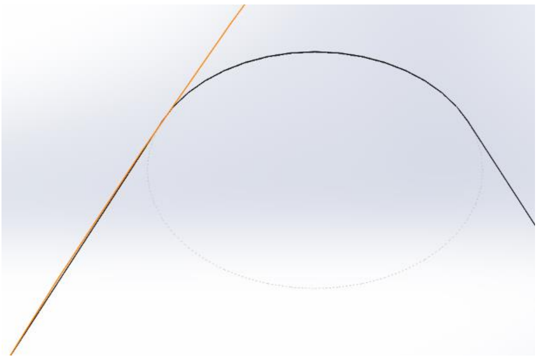

图 14

7、结语：由上可知，运用该方法所建立的模型完全符合麦克纳姆轮特点。至此，我的关于麦克纳姆轮小胶轮的参数讨论已经全部完成，而轮毂的参数相对来说简单很多，在这里就不讨论了，由读者自行探讨。

本文采用最原始的手工算法，可以说是带领大家重温高中数学知识，也是想告诉大家知识是无处不在的，缺少的只是一双发现的眼睛，很多人都知道麦克纳姆轮，然而又有多少人去真正了解过呢。

四川大学——火锅战队
2017 年 11 月 17 日